Chapitre 10

Combinatoire et dénombrement

10.1 Cardinal d'un ensemble

10.1.1 Cardinal, ensemble fini et p-uplet

Définition 10.1. *Soit E un ensemble.*

— *Le **cardinal** de E, noté* $\text{card}\,(E)$*, est le nombre d'éléments de l'ensemble E.*

— *E est un **ensemble fini** si et seulement si son cardinal est fini :* $\text{card}\,(E) < +\infty$.

Exemples :

— $\text{card}\,(\emptyset) = 0$. — $\text{card}\,(\{0\,;1\}) = 2$. — $\text{card}\,(\mathbb{N}) = +\infty$. — $\text{card}\,(\mathbb{R}) = +\infty$.

Remarques :

— Il existe plusieurs infinis ; par exemple l'infini des réels est plus grand que celui des entiers naturels : $\text{card}\,(\mathbb{N}) < \text{card}\,(\mathbb{R})$.

— Les cardinaux infinis mènent souvent à des résultats contre-intuitifs : il y a par exemple autant de nombres pairs (ou impairs) que d'entiers naturels ; ou encore autant d'entiers naturels que relatifs ($\text{card}\,(\mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{Z})$).

Définition 10.2. *On appelle **couple**, **triplet** ou p-**uplet** toute collection ordonnée de deux, trois ou p éléments.*

Exemples :

— $(1\,;2)$ est un couple. — $(x\,;y\,;z)$ est un triplet. — $(\spadesuit\,;\diamondsuit\,;\clubsuit\,;\heartsuit)$ est un 4-uplet.

Remarque : dans un p-uplet, l'ordre a une importance ; par exemple, $(1\,;2) \neq (2\,;1)$; contrairement aux ensembles dans lesquels l'ordre n'a pas d'importance : $\{1\,;2\} = \{2\,;1\}$.

10.1.2 Principe additif

Définition 10.3. *Deux ensembles E et F sont* ***disjoints*** *lorsque $E \cap F = \emptyset$.*

Exemples :

— Les ensembles des nombres pairs et impairs sont disjoints : aucun nombre n'est à la fois pair et impair.

— $E = \{0\,;1\}$ et $F = \{2\,;3\,;4\}$ sont disjoints, ils n'ont aucun élément en commun.

Proposition 10.1.

1. *Soient E et F deux ensembles finis. On a alors*

$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F).$$

2. *Soient $n \geqslant 2$ et E_1,..., E_n n ensembles finis deux à deux disjoints. On a*

$$\operatorname{card}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \operatorname{card}(E_1) + \cdots + \operatorname{card}(E_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(E_i).$$

Exemples :

1. Considérons les deux ensembles finis $E = \{0\,;1\}$ et $F = \{1\,;2\,;3\}$. On a alors $E \cap F = \{1\}$ et $E \cup F = \{0\,;1\,;2\,;3\}$. On vérifie bien alors que

$$\operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F) = 2 + 3 - 1 = 4 = \operatorname{card}(E \cup F).$$

2. Considérons les deux ensembles finis et disjoints $E_1 = \{0\,;1\}$ et $E_2 = \{2\,;3\}$. On a alors $E_1 \cup E_2 = \{0\,;1\,;2\,;3\}$ et on vérifie bien que

$$\operatorname{card}(E_1) + \operatorname{card}(E_2) = 2 + 2 = 4 = \operatorname{card}(E_1 \cup E_2).$$

10.1.3 Produit cartésien et principe multiplicatif

Définition 10.4. *Soient E et F deux ensembles non vides. Le* ***produit cartésien*** *de E et F est l'ensemble, noté $E \times F$ (se lit « E croix F »), constitué des couples $(x\,;y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Autrement dit :*

$$E \times F = \{(x\,;y) \mid x \in E,\, y \in F\}.$$

Exemple : Soient $E = \{a\,;b\}$ et $F = \{1\,;2\,;3\}$.

E \ F	1	2	3
a	$(a\,;1)$	$(a\,;2)$	$(a\,;3)$
b	$(b\,;1)$	$(b\,;2)$	$(b\,;3)$

On a donc $E \times F = \{(a\,;1)\,;(a\,;2)\,;(a\,;3)\,;(b\,;1)\,;(b\,;2)\,;(b\,;3)\}$.

Proposition 10.2.

1. *Soient E_1,..., E_n n ensembles finis. On a alors :*

$$\operatorname{card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \operatorname{card}(E_1) \times \cdots \times \operatorname{card}(E_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card}(E_i).$$

   En particulier, $\operatorname{card}(E_1 \times E_2) = \operatorname{card}(E_1) \times \operatorname{card}(E_2)$.

2. *Soit E un ensemble. On note E^n l'ensemble $E^n = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$. Alors*

$$\operatorname{card}(E^n) = \underbrace{\operatorname{card}(E) \times \cdots \times \operatorname{card}(E)}_{n \text{ fois}} = \operatorname{card}(E)^n.$$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on remarque bien que

$$\operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F) = 2 \times 3 = 6 = \operatorname{card}(E \times F).$$

Exercices : 10.1 à 10.10 ; 10.29 à 10.34.

10.2 Arrangements et permutations

10.2.1 Factorielle

Définition 10.5. *On appelle* ***factorielle*** *de n, noté $n!$, le produit de tous les entiers de 1 à n :*

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Par convention $0! = 1$.

Exemple : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Exercices : 10.11 et 10.12 ; 10.35.

10.2.2 Arrangements et permutations

Définition 10.6. *Soient E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n. Un* ***arrangement*** *de k éléments de E est un k-uplet d'éléments* ***distincts*** *de E.*

Exemple : Soit l'ensemble $E = \{A\,;B\,;C\,;D\}$. Le triplet $(B\,;C\,;D)$ est un arrangement de 3 éléments de E. Le triplet $(C\,;D\,;D)$ n'en est pas un car tous ses éléments ne sont pas distincts.

Proposition 10.3. *Soient E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur à n. Le nombre d'arrangements de k éléments de E est :*

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple : Soit $E = \{r\,;\,a\,;\,i\,;\,c\,;\,h\,;\,u\}$. Pour former un arrangement à 4 élément (un 4-uplet ou quadruplet) on a 6 choix pour la première lettre, puis 5 choix pour la deuxième (car il n'y a pas de répétition), puis 4 choix pour la troisième lettre et enfin 3 choix pour la quatrième lettre. Ainsi le nombre d'arrangements possible est :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6!}{2 \times 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360.$$

Démonstration. Pour construire un k-uplet d'éléments distincts de E, on a n choix pour le premier élément de l'arrangement, $n-1$ choix pour le second, $\dots$, $n-k+1$ pour le k-ième élément. Ainsi on a :

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Définition 10.7. *Soit E un ensemble de n éléments. Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E.*

Remarques :

— Lister toutes les permutations de E, c'est écrire E dans tous les ordres possibles.

— Les arrangements ont un ordre : $(a\,;b\,;c)$ et $(b\,;a\,;c)$ sont deux arrangements différents car l'ordre n'est pas le même. Ils ne sont pas des ensembles, dans lesquels l'ordre n'a pas d'importance, mais des k-uplets.

Exemple : Soit $E = \{A\,;B\,;C\}$. L'ensemble de ses permutations est

$$\{(A\,;B\,;C)\ ;(A\,;C\,;B)\ ;(B\,;A\,;C)\ ;(B\,;C\,;A)\ ;(C\,;A\,;B)\ ;(C\,;B\,;A)\}.$$

Proposition 10.4. *Soit E un ensemble de n éléments. Le nombre de permutations de E est $n!$*

Démonstration. On calcule le nombre d'arrangements à n éléments d'un ensemble à n éléments :

$$\mathcal{A}_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

□

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on vérifie bien que l'on a $6! = 720$ permutations de E.

Exercices : 10.13 à 10.17 ; 10.36 à 10.39.

10.3 Combinaisons

Définition 10.8.

1. *Une **partie** ou **combinaison** de E est un sous-ensemble d'éléments de E.*
2. *On note $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties** de E.*

Exemple : Soit l'ensemble $E = \{a\,; b\,; c\}$. L'ensemble $\{a\,; b\}$ est une partie (ou combinaison) de E. Il y a au total 8 parties (ou combinaisons) de E :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\,; \{a\}\,; \{b\}\,; \{c\}\,; \{a\,; b\}\,; \{a\,; c\}\,; \{b\,; c\}\,; \{a\,; b\,; c\}\}.$$

Remarque : $\emptyset$ et E sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Définition 10.9. *Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n (éléments de E) est noté $\binom{n}{k}$.*

Proposition 10.5. *Pour tous entiers naturels n et k tels que $k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Démonstration. Soit n un entier naturel E un ensemble à n éléments.

— Si $n = k = 0$ alors E est l'ensemble vide et le seul sous-ensemble de l'ensemble vide est l'ensemble vide (les sous-ensembles ne sont pas forcément stricts) ; on a donc $\binom{0}{0} = 1$. Par ailleurs, $\dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1$, l'égalité est vérifiée.

— Si $n \geqslant 1$ et $k = 0$ alors le seul sous-ensemble vide de E est l'ensemble vide donc $\binom{n}{0} = 1$. Par ailleurs, $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1$, l'égalité est vérifiée.

— Si $1 \leqslant k \leqslant n$, on considère les sous-ensembles de E à k éléments ; par définition il y en a $\binom{n}{k}$. Pour chacun de ces sous-ensembles à k éléments il y a $k!$ arrangements. Nous avons donc formé $\binom{n}{k} \times k!$ arrangements à k éléments de l'ensemble E. Par ailleurs, le nombre d'arrangement à k éléments dans E est : $\mathcal{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; donc :

$$\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!} \iff \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\square$

Proposition 10.6.

1. *Pour touq entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*
2. ***[Relation de Pascal]** Pour tous $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.*

Démonstration.

1. $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments dans un ensemble à n éléments. Donc c'est le nombre de façon de choisir k éléments parmi n (sans aucun ordre), mais choisir les k éléments qui vont dans la combinaison est équivalent à choisir les $n-k$ éléments qui n'y vont pas. Donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Soit $x \in E$ un élément quelconque. Il y a deux types de combinaisons à k éléments : celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas. La réunion de ces deux types de combinaisons forment l'ensemble des combinaisons à k éléments de E.
   Le nombre de combinaisons à k éléments de E contenant x est $\binom{n-1}{k-1}$. En effet, il faut choisir les $k-1$ éléments restant dans la combinaison parmi les $n-1$ éléments de $E\backslash\{x\}$.
   Par ailleurs, le nombre de combinaisons à k éléments de E ne contenant pas x est $\binom{n-1}{k}$.
   Ainsi :
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

□

Remarque : il est aussi possible de démontrer le dernier point par le calcul.

Proposition 10.7. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble de cardinal n. Alors le nombre de parties de E est*
$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration. Soit E un ensemble de cardinal n. On va calculer $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E))$, le nombre de parties de E, de deux manières.

— Une partie de E peut posséder $0, 1, \ldots, n$ éléments et $\mathcal{P}(E)$ est la réunion de toutes ces parties. Or le nombre de parties (combinaisons) de k éléments parmi n est $\binom{n}{k}$. Donc le nombre total de parties (combinaisons) de E est :
$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

— Notons $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de E. Constituons une partie de E en spécifiant, pour chacun des éléments de E, s'il appartient ou non à cette partie. Pour x_1 il y a deux choix, le prendre ou pas ; de même pour x_2 et ainsi de suite jusqu'à x_n. Donc pour chacun des n éléments il faut décider si il est ou non dans le sous-ensemble, il y a donc 2^n choix de parties. Ainsi :
$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

□

Remarque : il est aussi possible de montrer cela par récurrence.

Proposition 10.8. *Soit E un ensemble à n éléments. On a* $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \operatorname{card}(\{0\,;1\}^n)$.

Démonstration. D'après les propriétés précédentes, on a

$$\operatorname{card}(\{0\,;1\}^n) = \operatorname{card}(\{0\,;1\})^n = 2^n = \operatorname{card}(\mathcal{P}(E))\,.$$

□

Remarque : Le fait que ces deux cardinaux soient égaux signifie que l'on peut associer à chaque partie de E un unique n-uplet de $\{0\,;1\}^n$. Cette association est ce que l'on appelle une **bijection** : f est une bijection de E dans F si et seulement si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Établissons une telle bijection entre $E = \{x_1\,;\ldots\,;x_n\}$ et $\{0\,;1\}^n$. Considérons la fonction $f : \mathcal{P}(E) \mapsto \{0\,;1\}^n$ définie par $f(P) = (\delta_{x_1}\,;\ldots\,;\delta_{x_n})$ où P est une partie de E et, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\delta_{x_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in P, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemples :

— la partie $\{x_1\}$ correspond au n-uplet $(1\,;0\,;\ldots\,;0)$.

— Le n-uplet $(0\,;0\,;1\,;\cdots;1)$ correspond à la partie $\{x_3\,;\ldots;x_n\}$.

— La partie $\emptyset$ correspond au n-uplet $(0\,;\ldots\,;0)$.

Il est évident que tout n-uplet admet un unique antécédent par f dans $\mathcal{P}(E)$ et donc que f est bijective.

Remarques : D'autres liens peuvent être établis par le truchement de $\{0\,;1\}^n$.

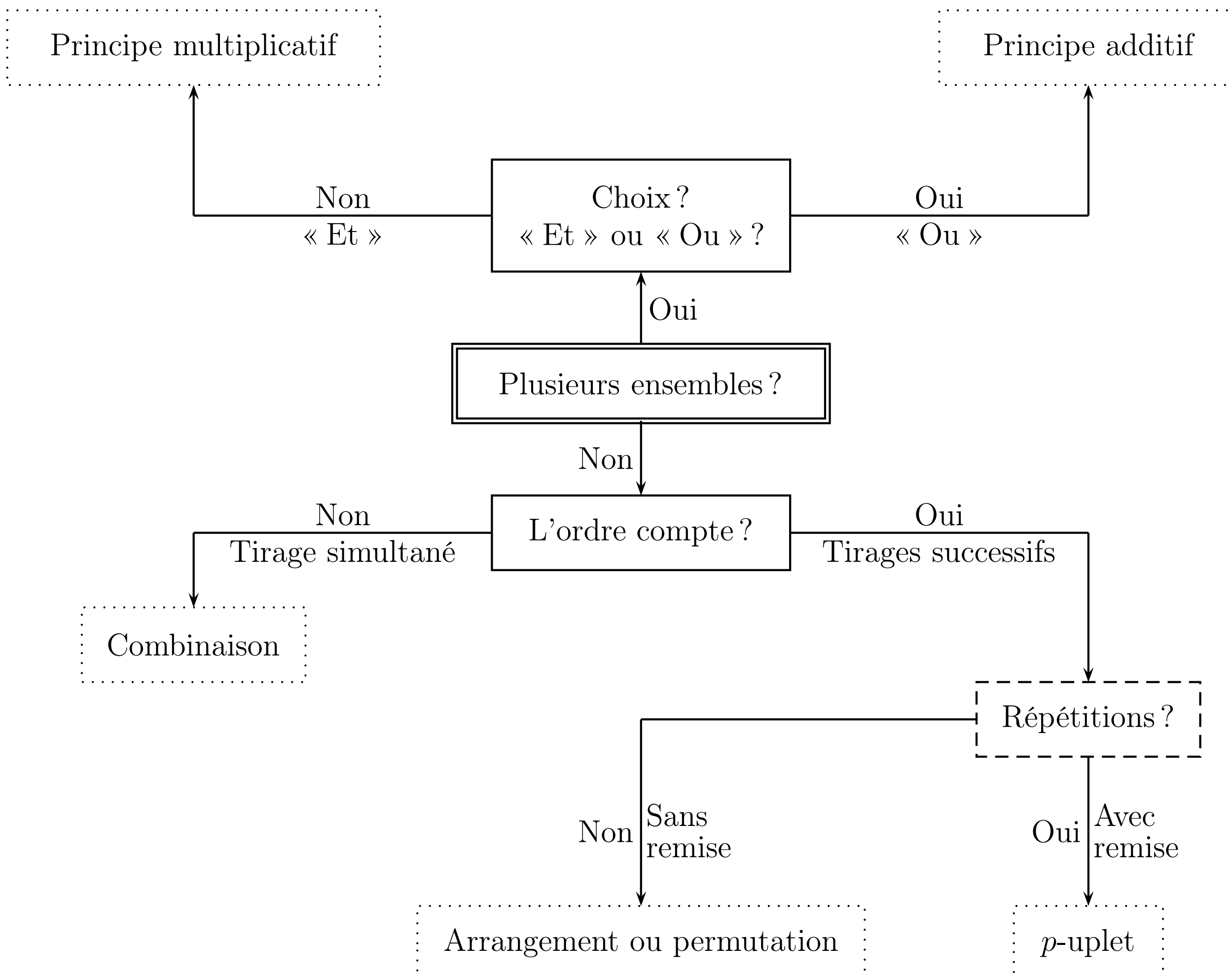
— Considérons les mots de n lettres écrits dans un alphabet binaire. Par défaut, nous pouvons considérer l'alphabet $\{0\,;1\}$. À chaque mot de n lettres, on peut associer un n-uplet et réciproquement ; par exemple $(1\,;0\,;1)$ donnerait le mot 101. D'après ce que l'on vient de voir, on peut donc écrire 2^n mots différents à n lettres dans cet alphabet.

— Dans un arbre binaire à n niveau, on peut symboliser le choix d'un embranchement par 1 pour celui du haut (ou gauche) et 0 pour celui du bas (ou droite). Ainsi, un chemin dans l'arbre peut être décrit comme un n-uplet de $\{0\,;1\}^n$ et réciproquement ; par exemple $(0\,;\ldots\,;0)$ est le chemin qui prend l'embranchement du bas à chaque niveau. Il y a donc autant de chemins dans un arbre binaires que de n-uplets de $\{0\,;1\}^n$: 2^n.

— Les issues d'une épreuve de Bernoulli peuvent être symbolisées par des 0 et 1. Ainsi, pour n épreuves de Bernoulli indépendantes, le résultat peut être écrit sous la forme d'un n-uplet de $\{0\,;1\}^n$; par exemple, le résultat de quatre lancers de pile (1) ou face (0) peut s'écrire sous la forme $(1\,;1\,;0\,;1)$ qui correspond à PPFP. Il y a donc autant de résultats possibles à n épreuves de Bernoulli que de n-uplets de $\{0\,;1\}^n$: 2^n.

Exercices : 10.18 à 10.25 ; 10.40 à 10.43.

10.4 Schéma récapitulatif



10.5 Capacités attendues

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

10.6 Exercices

10.6.1 Progresser

Cardinal d'un ensemble

Exercice 10.1. On considère les ensembles $A = \{7\,;8\,;14\,;21\}$, $B = \{5\,;7\,;14\,;25\,;123\}$ et $C = \{7\,;13\,;55\}$. Donner les éléments et les cardinaux de :

1. $A \cup B$;
2. $A \cap B$;
3. $A \cup C$;
4. $A \cap B \cap C$;
5. $A \cup B \cup C$;
6. $B \cup C$.

Exercice 10.2. Soient $A = \{1\,;3\,;5\,;7\,;9\}$ et B tel que $A \cap B = \{1\,;5\}$ et $A \cup B = \{1\,;3\,;5\,;7\,;9\,;10\,;11\}$. Déterminer $\operatorname{card}(B)$ puis B.

Exercice 10.3. Soient A et B deux ensembles disjoints tels que $\operatorname{card}(A) = 11$ et $\operatorname{card}(B) = 8$. Déterminer $\operatorname{card}(A \cap B)$, $\operatorname{card}(A \cup B)$ et $\operatorname{card}(A \times B)$.

Exercice 10.4. E est l'ensemble $\{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;g\}$.

1. Déterminer un 6-uplet d'éléments de E.
2. Déterminer le nombre d'éléments de E^6.

Exercice 10.5. [Pokémons] Dans un groupe de 25 pokémons, 15 sont de type feu, 8 de type vol et 4 sont feu et vol.

1. Déterminer le nombre de pokémons qui ont au moins l'un des deux types feu ou vol.
2. Combien de pokémons ne sont ni vol ni feu ?

Exercice 10.6. [Baguette magique] Afin de préparer votre entrée à la prestigieuse école de Poudlard et devenir un puissant sorcier, vous devez acheter votre première baguette magique. Vous vous rendez donc dans la boutique d'Ollivander sur le chemin de Traverse. Celui-ci vous explique alors que les deux composants de base de la baguette sont le bois et le cœur, ce dernier provenant d'un animal ou d'une plante magique. Ollivander fabriquerait des baguettes à partir de 50 essences d'arbres et de 18 cœurs différents, et ceux pour toutes les longueurs et souplesses de baguettes possibles.

1. Déterminer deux ensembles E et F qui permettent de considérer chaque choix possible de baguette comme un élément du produit cartésien $E \times F$.
2. Combien de possibilités de baguettes s'offrent à vous ?

Exercice 10.7. [Informatique] En informatique, un octet est un 8-uplet d'éléments de $\{0\,;1\}$.

1. Donner un exemple d'octet.
2. Combien y a-t-il d'octets possibles ?

Exercice 10.8. [Immatriculation] La plaque d'immatriculation d'une voiture comporte :
- Deux lettres distinctes de O, I et U (pour éviter les confusions avec 0,1 et V) ;
- trois chiffres entre 1 et 9 ;
- à nouveau de deux lettres distinctes de O, I et U.

Déterminer le nombre de plaques d'immatriculation différentes possibles.

Exercice 10.9. [Mot de passe] Un mot de passe est constitué d'au moins huit caractères. Chaque signe peut être une lettre (majuscule ou minuscule), un chiffre ou un caractère spécial parmi 28 disponibles. Un logiciel d'attaque par force brute teste environ cent millions de mots de passe par seconde. En combien de temps au maximum le logiciel peut-il découvrir un mot de passe de huit caractères ? Même question pour un mot de passe de quinze caractères.

Exercice 10.10. Parmi tous les nombres entiers de 1 à 100, combien s'écrivent avec le chiffre 3 ?

Factorielle

Exercice 10.11.
1. Écrire les nombres suivants sans factoriels.

   (a) $A = 5!.$ (b) $B = \dfrac{10!}{9!}.$ (c) $C = 5! \times 6.$ (d) $D = \dfrac{20!}{18!}.$

2. Écrire les nombres suivants à l'aide de factoriels.

   (a) $B = 5 \times 3 \times 2 \times 4.$ (b) $C = 8 \times 7 \times 6.$ (c) $D = \dfrac{1}{13 \times 14}.$

Exercice 10.12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les écritures suivantes :

1. $(n+1) \times n!$; 2. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)}$; 3. $\dfrac{(2(n+1))!}{(2n+1)!}.$

Arrangements et permutations

Exercice 10.13. Soit $A = \{3\,;4\,;a\,;b\}$
1. Donner tous les arrangements à deux éléments de l'ensemble A.
2. Combien l'ensemble A a-t-il de permutations ?

Exercice 10.14. Soit A un ensemble de cardinal 8.
1. Combien y a-t-il d'arrangements de A à trois éléments ?
2. Combien y a-t-il d'arrangements de A à 7 éléments ?
3. Combien y a-t-il de permutations de A ?

Exercice 10.15. [QCM] Un professeur a préparé un QCM à faire sur une application. Il a dix questions dans sa bibliothèque et l'application en choisit cinq au hasard et les propose les unes après les autres. Combien de QCM différents peut-on obtenir sachant que deux QCM ayant les mêmes questions mais dans un ordre différent sont différents ?

Exercice 10.16. [Loutre] On souhaite construire de nouveaux mots avec les lettre du mot LOUTRE. On ne se souciera pas de savoir si les mots obtenus ont un sens ou non, ou si ils sont même prononçable. Chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois.

1. Combien de mot de trois lettres peut-on construire :
   (a) sans restrictions ?
   (b) sachant que le E est en première position ?
   (c) sans utiliser la lettre T ?
2. Combien de mots de six lettres peut-on construire :
   (a) sans restriction ?
   (b) sachant que le T est en troisième position et le R en dernière position ?

Exercice 10.17.

1. Un ensemble A possède 720 permutations. Quel est le cardinal de A ?
2. Un ensemble B possède 306 2-arrangements. Quel est le cardinal de B ?

Combinaisons

Exercice 10.18. E est l'ensemble $\{0\,;1\}$.

1. Déterminer le nombre de parties de E.
2. Écrire toutes ces parties.

Exercice 10.19. On considère l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\}$.

1. Donner tous les sous-ensembles de E ayant deux éléments.
2. En déduire $\binom{4}{2}$.

Exercice 10.20. En utilisant la formule des coefficients binomiaux, calculer :

1. $\binom{10}{3}$; 2. $\binom{7}{5}$; 3. $\binom{20}{2}$; 4. $\binom{10}{7}$; 5. $\binom{6}{6}$; 6. $\binom{89}{1}$.

Exercice 10.21. [Coefficients binomiaux particuliers] Soit $n \in \mathbb{N}$. Que valent les coefficients binomiaux suivants ?

1. $\binom{n}{0}$. 2. $\binom{n}{1}$. 3. $\binom{n}{n-1}$. 4. $\binom{n}{n}$.

Exercice 10.22. Sans utiliser la formule avec les factorielles, ni la calculatrice, que valent les coefficients suivants ?

1. $\binom{10}{1}$; 2. $\binom{48}{47}$; 3. $\binom{20}{20}$; 4. $\binom{30}{29}$; 5. $\binom{14}{14}$; 6. $\binom{20}{0}$.

Exercice 10.23. [Casino Royale] Au Casino Royale, à chaque manche d'un jeu, le gain peut être de 1 000 euros, 5 000 euros, ou −3 000 euros. James joue entre 0 et 3 manches.

1. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble $E = \{-3\,;1\,;5\}$.
2. Écrire ces parties.
3. En déduire les gains possibles de James.

Exercice 10.24. [Débats] Aux élections présidentielles de 2017, onze candidats se sont présentés au premier tour. Si on avait organisé un débat entre chaque paire de candidats, combien de débats auraient eu lieu ?

Exercice 10.25. Soit B de cardinal 9.

1. Combien y a-t-il de parties de B ?
2. Combien y a-t-il de partie de B à trois éléments ?
3. Sans calcul, donner le nombre de parties de B à six éléments.

10.6.2 Approfondir

Exercice 10.26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 10.27. [Formule du binôme] On souhaite démontrer par récurrence la propriété notée P_n : « pour tout réels a et b et pour tout entier naturel non nul, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».

1. (a) Démontrer que l'égalité est vraie pour $n = 1$.
   (b) Démontrer que l'égalité est vraie pour $n = 2$.
   (c) Démontrer que l'égalité est vraie pour $n = 3$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que P_k soit vraie. On souhaite montrer que P_{k+1} est vraie.
   (a) En remarquant $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$, montrer que

   $$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{i+1} b^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i+1}.$$

   (b) Justifier que la première somme vaut $\sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} a^j b^{k-j+1}$.
   (c) On peut ajouter les deux sommes si les indices de sommation sont les même. On va donc isolé, dans chacune des deux sommes, les indices qui ne se retrouvent pas dans l'autre. Exprimer $(a+b)^{k+1}$ en n'utilisant qu'un seul signe de sommation.
   (d) En utilisant la formule de Pascal et ce qui précède, récrire la somme précédente.
   (e) Terminer le raisonnement.

Exercice 10.28. Soient n un entier naturel et E un ensemble de cardinal $2n$.

1. Combien de parties à n éléments de E existe-t-il ?
2. On divise E en deux sous-ensembles disjoints contenant chacun n éléments. Prendre n éléments dans E revient à choisir un entier k entre 0 et n, prendre k éléments le premier sous-ensemble et $n-k$ dans le second. De cette méthode, déduire l'égalité

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

10.6.3 S'entraîner

Cardinal d'un ensemble

Exercice 10.29. Soient A et B deux ensembles finis tels que $\text{card}\,(A^3 \times B^2) = 3087$. Déterminer $\text{card}\,(A)$ et $\text{card}\,(B)$.

Exercice 10.30.

1. Le digicode d'un immeuble comporte quatre chiffres (distincts ou non) de 0 à 9. Déterminer le nombre de codes différents possibles.
2. On colorie en rouge, vert ou bleu chaque case d'un quadrillage en comportant 30. Déterminer le nombre de coloriages différents possibles.

Exercice 10.31. [Grimoires] Hermione souhaite emprunter un grimoire à la bibliothèque afin de réviser chacune des matières suivantes : potions, sortilèges et métamorphoses. Elle doit choisir un parmi trois pour les potions, un parmi dix pour les sortilèges et un parmi cinq pour la métamorphose. Déterminer le nombre d'emprunts possibles qu'elle peut effectuer ?

Exercice 10.32. [Triple face] Harvey demande : « Si je lance trois pièces équilibrées, quelle est la probabilité qu'elles tombent toutes du même côté ? »

Sélina répond : « Comme on a trois pièces pour seulement deux faces, il y en a forcément deux qui sont du même côté et, pour la troisième, il me reste une chance sur deux. La réponse est donc une chance sur deux. »

Et vous, Bruce, qu'en pensez-vous ? Vous pourrez tester votre réponse à l'aide d'un programme Python ou du tableur.

Exercice 10.33. On considère l'ensemble A des diviseurs positifs de 24 et l'ensemble B des diviseurs positifs de 42. Représenter ces deux ensembles sous la forme d'un diagramme et préciser les cardinaux de A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$.

Exercice 10.34. [ADN] On souhaite construire des gènes à n nucléotides en utilisant les quatre bases nucléiques de l'ADN : adénine (A), cytosine (C), guanine (G) et thymine (T). On voudrait au moins mille gènes différents.

1. Cette contrainte est-elle respectée lorsque $n = 2$? Lorsque $n = 3$?
2. Déterminer la valeur minimale de n pour obtenir au moins mille gènes différents.

Factorielle

Exercice 10.35. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les écritures suivantes :

1. $\dfrac{n!(n+2)!}{(n!)^2}$;
2. $\dfrac{(n+7)!}{(n+5)!}$;
3. $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

Arrangements et permutations

Exercice 10.36. E est l'ensemble $\{R\,;A\,;I\,;C\,;H\,;U\}$.

1. Donner un triplet d'éléments différents de E.
2. Combien de triplets de telle sorte peut-on former ?

Exercice 10.37. [Podium] Huit coureurs sont au départ de la finale d'une course.

1. Combien de classements différents peut-on construire ?
2. Combien de podiums différents existe-t-il ?

Exercice 10.38. Combien d'entiers naturels distincts pourrait-on constituer avec trois chiffres différents choisis entre 0 et 9 inclus, chaque chiffre ne pouvant être utilisé qu'une seule fois ?

Exercice 10.39. [Youpi-ki-yay] On souhaite colorer les lettres du mot YOUPI. On dispose pour cela de 5 couleurs différentes.

1. Combien de coloriages différents est-il possible de réaliser ?
2. Même question si l'on ne souhaite utiliser chaque couleur qu'une seule fois.
3. Même question si l'on souhaite que deux lettres adjacentes ne soient pas de la même couleur.
4. On souhaite également ajouter un fond coloré derrière le YOUPI. La couleur de ce fond ne peut alors pas être utilisée pour les lettres. Reprendre les questions précédentes avec cette restriction en plus.

Combinaisons

Exercice 10.40. Soit $A = \{7\,;8\,;9\}$. Donner toutes les parties de A.

Exercice 10.41. On considère l'ensemble $F = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}$.

1. Donner tous les sous-ensembles de F ayant trois éléments.
2. En déduire $\dbinom{5}{3}$.

Exercice 10.42. Vous devez piocher dans un sac composé de 10 jetons de couleurs différentes.

1. Combien de poignées différentes, éventuellement vides, pouvez-vous extraire du sac ?
2. Combien de poignées différentes de 4 jetons pouvez-vous extraire du sac ?

Exercice 10.43. [Spécialités] A l'entrée en première, on demande aux élèves de choisir trois spécialités parmi neuf proposées. Si on ne donne aucune restriction, combien de combinaisons différentes peut-on générer ?

10.6.4 Le Flashback !

Flashback 10.1. [Centre étrangers, mai 2022] *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.*

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1+x^2)$. Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2\,022$

   (a) n'admet aucune solution.
   (b) admet exactement une solution.
   (c) admet exactement deux solutions.
   (d) admet une infinité de solutions.

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par : $g(x) = x\ln(x) - x^2$.
   On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

   (a) La fonction g est convexe sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) La fonction g est concave sur $]0\,;+\infty[$.
   (c) La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0\,;+\infty[$.
   (d) La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0\,;+\infty[$.

3. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur

   (a) $]-3\,;2[$.
   (b) $]-\infty\,;-6]$.
   (c) $]0\,;+\infty[$.
   (d) $]2\,;+\infty[$.

4. On considère la fonction f définie sur $]0,5\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$.
   Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

   (a) $y = 4x - 7$.
   (b) $y = 2x - 4$.
   (c) $y = -3(x-1) + 4$.
   (d) $y = 2x - 1$.

5. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

   (a) $]-\infty\,;-2] \cup]1\,;+\infty[$.
   (b) $]1\,;+\infty[$.
   (c) $\emptyset$.
   (d) $]-1\,;1[$.