Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Suites numériques

Définition 1.1. *On dit que la fonction u est une **suite réelle** si elle est définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de n par u se note u_n ; on l'appelle **terme d'indice** n **de** u. La suite u est communément notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus brièvement (u_n).*

Exemples :

— On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$. On a alors :

n	0	1	2	3	...
u_n	$2 \times 0 + 1 = 1$	$2 \times 1 + 1 = 3$	$2 \times 2 + 1 = 5$	$2 \times 3 + 1 = 7$	...

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière **explicite** car chaque terme peut être déterminé par la seule connaissance de n.

— Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

n	0	1	2	3	...
v_n	1	$2 \times v_0 + 1 = 3$	$2 \times v_1 + 1 = 7$	$2 \times v_2 + 1 = 15$	...

Le calcul de v_1 requiert de connaître la valeur de v_0 ; celui de v_2 requiert la valeur de v_1, etc. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **par récurrence** car car chaque terme peut être déterminé à partir du terme précédent : v_{n+1} est calculé à partir de v_n.

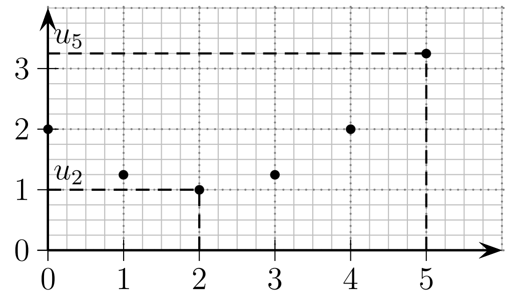
Remarque : Le premier terme de la suite u n'est pas forcément u_0, cela peut être u_1, u_2, etc.

Définition 1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La représentation graphique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points de coordonnées $(n\,; u_n)$, où n parcourt les valeurs de $\mathbb{N}$. On appelle cette représentation **nuage de points**.*

Exemple : On représente les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{4}n^2 - n + 2$$

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1,25	1	1,25	2	3,25



Exercices : 12.1 à 12.5 ; 12.9 et 12.10.

1.2 Variations

Définition 1.3. *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si on a $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemples :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 1 - (2n+1) \\ &= 2n + 3 - 2n - 1 \\ &= 2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -(n+1) - (-n) \\ &= -n - 1 + n \\ &= -1 \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$. On a :

$$w_0 = 1, \qquad w_1 = -1, \qquad w_2 = 1, \qquad w_3 = -1.$$

   Ainsi $w_1 < w_0$ et $w_1 < w_2$; la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas monotone.

Exercices : 12.6 à 12.8 ; 12.11 et 12.12.

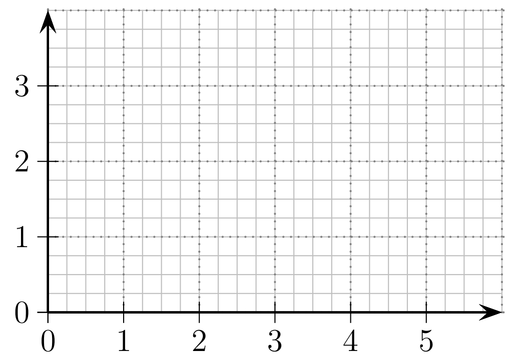
1.3 Exercices

1.3.1 Progresser

Suites numériques

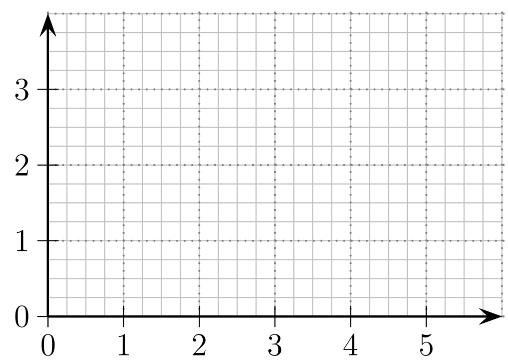
Exercice 1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Compléter le tableau ci-dessous donnant les six premier termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis représenter son nuage de points.

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

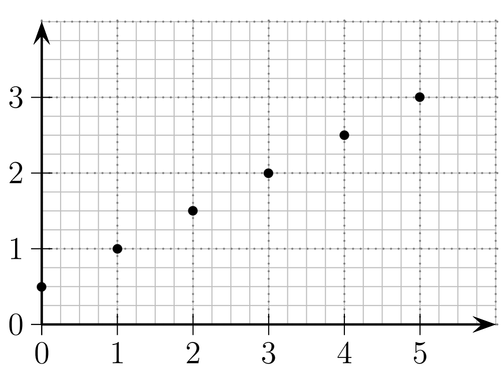


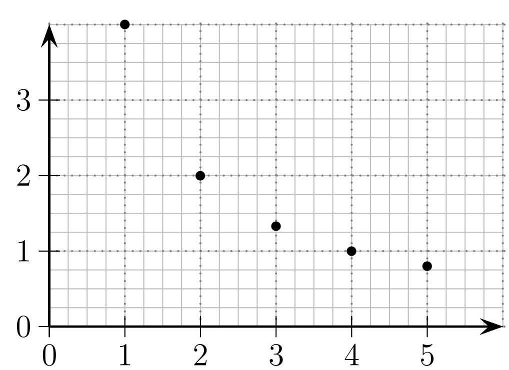
Exercice 1.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0,25$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter le tableau ci-dessous donnant les cinq premier termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis représenter son nuage de points.

n	0	1	2	3	4
u_n					



Exercice 1.3. Dans chaque cas, donner les valeurs de u_0, u_1,…, u_5 où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par le nuage de points ci-dessous.





Exercice 1.4. Calculer les quatre premiers termes de chacune des suites ci-dessous.

1. $u_n = 3^n$.
2. $v_n = n^2 + 1$.
3. $w_n = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 1.5. Calculer les quatre premiers termes de chacune des suites ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = u_n + n. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n}. \end{cases}$.

Variations

Exercice 1.6. Déterminer les variations des suites de l'exercice 12.3 sur $[\![0\,;5]\!]$. Peut-on généraliser ces variations à $\mathbb{N}$?

Exercice 1.7. Déterminer les variations de (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = 2n + 1$.
2. $u_n = n^2$.
3. $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 1.8. Déterminer les variations de (u_n) dans chacun des cas suivants.

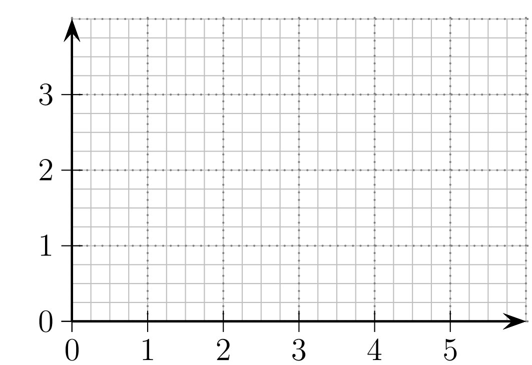
1. $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = u_n + n. \end{cases}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n. \end{cases}$

1.3.2 S'entraîner

Suites numériques

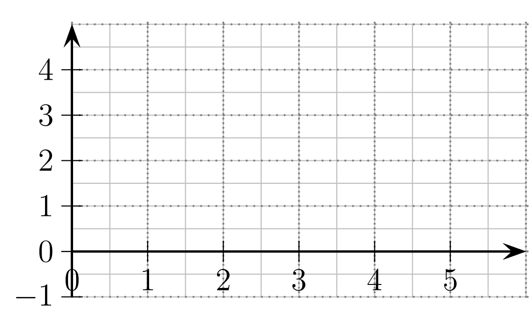
Exercice 1.9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{4} + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Compléter le tableau ci-dessous donnant les six premier termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis représenter son nuage de points.

n	0	1	2	3	4	5
u_n						



Exercice 1.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Compléter le tableau ci-dessous donnant les cinq premier termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis représenter son nuage de points.

n	0	1	2	3	4	5
u_n						



Variations

Exercice 1.11. Déterminer les variations de (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = -3n + 5$.
2. $u_n = -(n+1)^2$.

Exercice 1.12. Déterminer les variations de (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0, \\ u_{n+1} & = & u_n - 5. \end{array} \right.$.
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1, \\ u_{n+1} & = & -u_n^2 + u_n. \end{array} \right.$

1.3.3 Automatismes

Automatisme 1.1. L'opération qui permet de calculer 25% de 480 est :

1. $\dfrac{480}{25 \times 100}$
2. $25 \times 480 \times 0,1$
3. $\dfrac{480 \times 100}{25}$
4. $\dfrac{1}{4} \times 480$

Automatisme 1.2. Voici trois nombres : $A = \dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{19}{100}$ et $C = 0,21$. Le classement par ordre croissant de ces trois nombres est :

1. $A < B < C$
2. $B < A < C$
3. $A < C < B$
4. $C < B < A$

Automatisme 1.3. Voici quatre nombres : $A = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$, $B = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$, $C = 0,05$ et $D = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$. Le plus grand de ces quatre nombres est :

1. A
2. B
3. C
4. D

Automatisme 1.4. Une durée de 100 minutes correspond à :

1. 1 heure
2. 1,40 heure
3. $\dfrac{5}{3}$ d'heure
4. 2 heures

Automatisme 1.5. Quand on développe $(x-3)^2$ on obtient :

1. $x^2 + 9$
2. $x^2 - 9$
3. $x^2 - 6x + 9$
4. $x^2 + 6x + 9$