Chapitre 2

Systèmes de numération

Un système de numération est un ensemble de conventions pour former les nombres, les dire, les écrire et calculer. Le système que nous utilisons quotidiennement est le système décimal parce que nous utilisons 10 symboles, les chiffres 0 à 9. Il existe différentes bases de comptage comme par exemple :

— la base 60 : système sexagésimal utilisé autrefois en Mésopotamie dont il nous reste 60 minutes qui font une heure et 60 secondes qui font une minute ;

— la base 20 : système utilisé par les mayas et les gaulois dont il nous reste le nombre « quatre-vingts » et diverses incohérences avec le système décimal ;

— la base 2 : système binaire incontournable en informatique.

En informatique, on utilise aussi la base hexadécimale (base 16), plus concise et plus facile à « lire » que de longues suites de 0 et de 1.

2.1 Numération des entiers

Définition 2.1. *Un entier naturel n s'écrit $a_p \dots a_2 a_1 a_0$ en base b si et seulement si*

$$n = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + ... + a_0 b^0,$$

où le nombre p est unique et les $a_i \in [\![0\,;b-1]\!]$ pour tout $i \in [\![0\,;p]\!]$.

Exemples :

— La base 2 : un entier naturel n s'écrit $a_p \dots a_2 a_1 a_0$ en base 2 si et seulement si

$$n = a_p 2^p + \dots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

— La base 10 : un entier naturel n s'écrit $a_p \dots a_2 a_1 a_0$ en base 10 si et seulement si

$$n = a_p 10^p + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0.$$

— La base 16 : un entier naturel n s'écrit $a_p \dots a_2 a_1 a_0$ en base 16 si et seulement si

$$n = a_p 16^p + \dots + a_2 16^2 + a_1 16^1 + a_0 16^0.$$

Base 2	Base 3	Base 8	Base 10	Base 16
0_2	0_3	0_8	0_{10}	0_{16}
1_2	1_3	1_8	1_{10}	1_{16}
10_2	2_3	2_8	2_{10}	2_{16}
11_2	10_3	3_8	3_{10}	3_{16}
100_2	11_3	4_8	4_{10}	4_{16}
101_2	12_3	5_8	5_{10}	5_{16}
110_2	20_3	6_8	6_{10}	6_{16}
111_2	21_3	7_8	7_{10}	7_{16}
1000_2	22_3	10_8	8_{10}	8_{16}
1001_2	100_3	11_8	9_{10}	9_{16}
1010_2	101_3	12_8	10_{10}	A_{16}
1011_2	102_3	13_8	11_{10}	B_{16}
1100_2	110_3	14_8	12_{10}	C_{16}
1101_2	111_3	15_8	13_{10}	D_{16}
1110_2	112_3	16_8	14_{10}	E_{16}
1111_2	120_3	17_8	15_{10}	F_{16}
10000_2	121_3	20_8	16_{10}	10_{16}
10001_2	122_3	21_8	17_{10}	11_{16}
10010_2	200_3	21_8	18_{10}	12_{16}
10011_2	201_3	22_8	19_{10}	13_{16}
10100_2	202_3	23_8	20_{10}	14_{16}

Pour toutes les bases b où $b \leq 10$, on utilise les chiffres de 0 à $b-1$. Pour les bases supérieures à 10, il faut d'autres symboles. Par convention, on utilise les premières lettres de l'alphabet : A, B, C ...

On note n_b la représentation d'un nombre n en base b. Par exemple 3_{10} pour 3 en base 10.

On remarque que quelque soit la base b, b s'écrit dans sa propre base 10_b. Par exemple, $2_{10} = 10_2$, $3_{10} = 10_3$, $16_{10} = 10_{16}$, etc. Cela revient à écrire que $b_{10} = 10_b$.

Une conséquence immédiate est que $(b^k)_{10} = (10^k)_b$. On l'observe bien dans la base 2 : $4_{10} = 100_2$, $8_{10} = 1000_2$, $16_{10} = 10000_2$; ainsi que dans la base 3 : $9_{10} = 100_3$.

2.2 Conversion des entiers entre les bases

2.2.1 Base 2 vers base 10

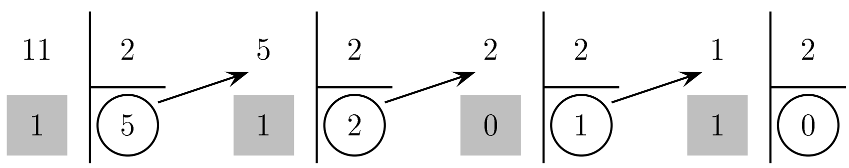
Pour convertir un nombre de base 2 en décimal, on multiplie chaque chiffre par la puissance de 2 de son rang :

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
			1	0	0	1	1

Ainsi $10011_2 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 16 + 2 + 1 = 19_{10}$.

2.2.2 Base 10 vers base 2

Pour convertir un nombre décimal en base 2, il faut effectuer les divisions euclidiennes successives par 2 et écrire les restes obtenus dans l'ordre « inverse ».



Ainsi $11_{10} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1011_2$.

2.2.3 Base 16 vers base 10

Pour convertir un nombre de base 16 en base 10, on multiplie chaque chiffre par la puissance de 16 de son rang. Par exemple, pour $2B_H$:

16^1	16^0
2	B

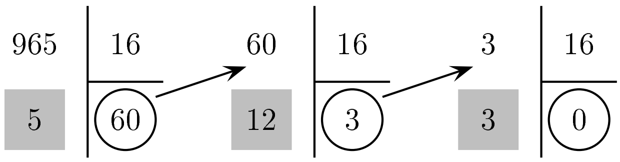
$$\begin{aligned} 2B_H &= 2 \times 16^1 + B \times 16^0 \\ &= 2 \times 16 + 11 \times 1 \\ &= 32 + 11 \\ &= 43. \end{aligned}$$

Prenons un autre exemple : 17_{16}, lequel n'est pas égal à 17_{10} ! En effet,

$$17_{16} = 1 \times 16^1 + 7 \times 16^0 = 16 + 7 = 23_{10}.$$

2.2.4 Base 10 vers base 16

Pour convertir un nombre de base 10 en base 16, il faut effectuer les divisions euclidiennes successives par 16 et écrire les restes obtenus dans l'ordre « inverse ».



Ainsi $965 = 3C5_{16}$ (en effet $12_{10} = C_{16}$).

Remarque : On note parfois $3C5_H$ pour $3C5_{16}$.

2.2.5 Base 2 vers base 16

Pour convertir un nombre de base 2 en base 16, on rassemble les chiffres par groupe de 4 en partant de la fin et obtenir directement la valeur en hexadécimal.

$$0100111000101100_2 = (0100)_2(1110)_2(0010)_2(1100)_2 = 4E2C_H.$$

Le groupement par 4 vient du fait que $16 = 2^4$. Regardons sur un exemple plus court :

$$\begin{aligned} 10101110_2 &= (1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4) + (1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) \\ &= (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) \times 2^4 + (1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) \\ &= 1010_2 \times 16^1 + 1110_2 \times 16^0 \\ &= AE_{16}. \end{aligned}$$

Prenons un dernier exemple : 10111_2. Ce dernier n'est pas constitué d'un nombre de chiffres multiple de 4. Comme on doit les regrouper par 4 en partant de la fin, on va obtenir :

$$10111_2 = 1_2(0111)_2 = 17_{16}.$$

2.2.6 Base 16 vers base 2

Pour convertir un nombre de base 16 en base 2, on code directement chaque chiffre en binaire.

$$A1C2_H = (1010)_2(0001)_2(1100)_2(0010)_2 = 1010000111000010_2.$$

2.3 Numération des réels

Définition 2.2. *Un réel x s'écrit $a_n \dots a_2a_1a_0, a_{-1}a_{-2}\dots a_{-m}$ en base b si et seulement si*

$$x = a_nb^n + ... + a_0b^0 + a_{-1}\frac{1}{b^1} + \cdots + a_{-m}\frac{1}{b^m},$$

où le nombre p est unique et les $a_i \in [\![0\,;b-1]\!]$ pour tout $i \in [\![m\,;n]\!]$.

Exemples :

— La base 2 : un réel x s'écrit $a_n \dots a_0, a_{-1}\dots a_{-m}$ en base 2 si et seulement si

$$x = a_n2^n + \dots + a_02^0 + a_{-1}\frac{1}{2^1} + \cdots + a_{-m}\frac{1}{2^m}.$$

Par exemple,

$$110,01_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times \frac{1}{2^1} + 1 \times \frac{1}{2^2}.$$

— La base 10 : un réel x s'écrit $a_n \dots a_0, a_{-1}\dots a_{-m}$ en base 10 si et seulement si

$$x = a_n10^n + \dots + a_010^0 + a_{-1}\frac{1}{10^1} + \cdots + a_{-m}\frac{1}{10^m}.$$

Par exemple,

$$34,79_{10} = 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 7 \times \frac{1}{10^1} + 9 \times \frac{1}{10^2}.$$

Remarque : un nombre à virgule se décompose en deux parties, la partie entière et la partie fractionnaire :

$$\underbrace{a_n \dots a_2a_1a_0}_{\text{partie entière}}, \underbrace{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-m}}_{\text{partie fractionnaire}}.$$

Notation : lorsqu'une séquence de chiffres $a_{-1}\dots a_{-k}$ se répète périodiquement à l'infini dans un nombre à virgule, on pourra le signifier par la notation $\overline{a_{-1}\dots a_{-k}}$. Par exemples :

$$0,\bar{3} = 0,333\dots = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 0,45\overline{123} = 0,45123123123\dots.$$

2.4 Conversion des réels entre les bases

2.4.1 Base 2 vers base 10

Comme pour les entiers, on multiplie chaque chiffre par la puissance de 2 de son rang :

$$1010,011_2 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = 8 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 10 + 0,25 + 0,125 = 10,375_{10}.$$

2.4.2 Base 10 vers base 2

Pour convertir un nombre décimal en base 2, on traite la partie entière comme on l'a vu plus haut. Pour la partie fractionnaire, on effectue l'inverse de la méthode de la partie entière : on multiplie à chaque étape la partie fractionnaire de l'étape précédente par 2 jusqu'à obtenir une partie fractionnaire nulle ou à l'infini. On récupère alors les parties entières de nos résultats intermédiaires, cette fois-ci dans l'ordre. En effet, si on a

$$x_{10} = a_{-1}\frac{1}{2^1} + a_{-2}\frac{1}{2^2} + \cdots + a_{-m}\frac{1}{2^m},$$

alors, en multipliant par deux, on a

$$2x_{10} = \underbrace{a_{-1} \times 2^0}_{\text{partie entière}} + \underbrace{a_{-2}\frac{1}{2^1} + \cdots + a_{-m}\frac{1}{2^{m-1}}}_{\text{partie fractionnaire}}.$$

En lisant alors la partie entière du résultat de la multiplication par 2, on obtient directement a_{-1}. Il suffit ensuite de réitérer le processus pour obtenir tout les a_{-i}. L'algorithme s'arrête si la partie fractionnaire devient nulle ; il est possible que cela ne soit pas le cas, on a alors un nombre infini de nombres après la virgule.

Exemple : déterminons la représentation binaire de $0,1875_{10}$.

Étape	$2\times$ partie fractionnaire	Partie entière
1	$2 \times 0,1875 = 0,375$	0
2	$2 \times 0,375 = 0,75$	0
3	$2 \times 0,75 = 1,5$	1
4	$2 \times 0,5 = 1,0$	1

Ainsi, $0,1875_{10} = 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2^2} + 1 \times \frac{1}{2^3} + 1 \times \frac{1}{2^4} = 0,0011_2$.

Remarque : la multiplication par 2 en binaire permet de décaler la virgule vers la droite comme le fait la multiplication par 10 en décimal.

2.5 Attendus et savoir-faire

— Écrire les premiers nombres entiers d'une base.

— Passer de la représentation d'une base dans une autre.

2.6 Exercices

2.6.1 Démarrage

Exercice 2.1. Donner les vingt premiers entiers en base 5 puis 12.

Exercice 2.2. Donner les valeurs en base décimale représentées par : 10101_2 ; 101_2 ; 11111111_2.

Exercice 2.3. Donner la représentation binaire des nombres décimaux : 14 ; 78 ; 623.

Exercice 2.4. Donner les valeurs entières représentées par : D_H ; $2C_H$; $A27D_H$.

Exercice 2.5. Donner la représentation hexadécimale des nombres décimaux : 32 ; 63 ; 250.

Exercice 2.6. Donner la représentation hexadécimale des nombres binaires : 1001_2 ; 01100111_2 ; 1001110101100010_2.

Exercice 2.7. Donner la représentation binaire des nombres hexadécimaux : $1B_H$; $FB2_H$; $1FEF_H$.

Exercice 2.8. Donner la représentation décimale des nombres binaires suivants : $101,1_2$; $1,01_2$; $0,101_2$.

Exercice 2.9. Donner la représentation binaire des nombres décimaux suivants : $0,5_{10}$; $3,75_{10}$; $5,625_{10}$.

2.6.2 Approfondissement

Exercice 2.10. Compléter la fonction ci-dessous prenant en entrée un nombre décimal et le convertissant en binaire.

```
def binaire(n : .....) -> ..... :

    assert ..............................................

    bin = ""
    quotient = .....

    while .................. :

        reste = ..................
        bin = ..................
        quotient = ..................

    return ..........
```

Exercice 2.11.

1. Écrire un algorithme prenant en entrée un nombre binaire et le convertissant en décimal.
2. Implémenter cet algorithme en Python.

Exercice 2.12.

1. Écrire un algorithme prenant en entrée un nombre décimal et le convertissant en hexadécimal.
2. Implémenter cet algorithme en Python.

Exercice 2.13.

1. Écrire un algorithme prenant en entrée un nombre hexadécimal et le convertissant en binaire.
2. Implémenter cet algorithme en Python.

Exercice 2.14. Donner la représentation binaire de $0,1_{10}$. Qu'observez-vous ?

Exercice 2.15. Donner la représentation binaire de $\frac{1}{3}$. Qu'observez-vous ?

2.6.3 Entraînement

Exercice 2.16. Donner les vingt premiers entiers en base 6 puis 13.

Exercice 2.17. Donner les valeurs en base décimale représentées par : 1010_2 ; 110_2 ; 1000000_2.

Exercice 2.18. Donner la représentation binaire des nombres décimaux : 42 ; 87 ; 193.

Exercice 2.19. Donner les valeurs entières représentées par : E_H ; $A31_H$; $6BC7_H$.

Exercice 2.20. Donner la représentation hexadécimale des nombres décimaux : 42 ; 378 ; 524.

Exercice 2.21. Donner la représentation hexadécimale des nombres binaires : 10011_2 ; 10100110_2 ; 1101010011_2.

Exercice 2.22. Donner la représentation binaire des nombres hexadécimaux : $D7_H$; $2AD5_H$; $4D86B_H$.

Exercice 2.23. Donner la représentation décimale des nombres binaires suivants : $10,11_2$; $0,101_2$; $1,011_2$.

Exercice 2.24. Donner la représentation binaire des nombres décimaux suivants : $0,25_{10}$; $7,375_{10}$; $10,5625_{10}$.

2.7 Ressources supplémentaires

— Vidéo sur le système binaire