Chapitre 1

Algèbre de Boole

1.1 Les opérations booléennes

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, un mathématicien et logicien anglais, George Boole, a développé une structure algébrique permettant de manipuler les propositions logiques au moyen d'équations mathématiques où les énoncés VRAI et FAUX sont représentés par les valeurs 1 et 0.

L'algèbre de Boole est constituée de :

— deux éléments : 0 et 1, respectivement Faux et Vrai ;

— deux opérations binaires : ET et OU, notées respectivement $\wedge$ et $\vee$;

— une opération unaire : NON notée $\neg$.

Une opération booléenne est entièrement définie par sa table de vérité, table dont chaque ligne affiche une combinaison des variables d'entrée et fournit en regard le résultat correspondant.

NON	
X	$\neg X$
0	1
1	0

OU		
X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ET		
X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'algèbre de Boole est à la base du fonctionnement des ordinateurs. Les 0 et 1 du langage binaire correspondent à ceux de la logique booléenne et physiquement à un courant faible ou fort dans les circuits de l'ordinateur. Les opérateurs ET, OU et NON existent eux aussi physiquement dans l'ordinateur sous forme de composants appelés portes logiques.

L'algèbre de Boole permet aussi d'étudier la valeur de vérité de propositions – à savoir quand elles sont vraies ou fausses – formulées à l'aide des connecteurs logiques ET, OU et NON. Ce qui est à la base des raisonnements mathématiques.

Exemple : Considérons la proposition « le pokémon est de type vol et feu ». On peut l'exprimer à l'aide de deux propositions élémentaires :

— F : « le pokémon est de type feu » ;

— V : « le pokémon est de type vol ».

F et V sont des booléens. Soit ces propositions sont vraies, soit elles sont fausses ; soit le pokémon est de type feu, soit il ne l'est pas. On a alors :

« Le pokémon est de type vol et feu » : $F \wedge V$.

Si on note E la proposition « le pokémon est de type électrique », alors on a

« Le pokémon est de type vol et feu ou n'est pas électrique » : $F \wedge V \vee (\neg E)$.

Remarque : on peut observer des similitudes entre OU et l'addition et ET et la multiplication. En effet, dans le cas de ET, on obtient le même résultat que pour la multiplication ; il en va de même pour OU à l'exception de 1 OU 1 qui renvoie 1 et non 2.

Les similitudes vont même plus loin puisque on retrouve la priorité du ET sur le OU, la distributivité du ET sur le OU et donc la possibilité de factoriser (à l'instar de $\times$ et $+$). Enfin, 1 est un élément neutre pour ET (comme pour la multiplication) et 0 pour OU (comme pour l'addition). On obtient le comparatif dans la propriété suivante.

Propriété 1.1. ***[Propriétés de OU et ET ; comparaison avec + et ×]***

Booléens $(\{0\,;1\}\,;\vee\,;\wedge)$	***Réels*** $(\mathbb{R}\,;+\,;\times)$
$A \vee B = B \vee A$	$a + b = b + a$
$A \wedge B = B \wedge A$	$a \times b = b \times a$
$\wedge$ *est prioritaire sur* $\vee$	$\times$ *est prioritaire sur* $+$
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
$1 \wedge A = A$ *(1 élément neutre pour ET)*	$1 \times a = a$ *(1 élément neutre pour ×)*
$0 \wedge A = 0$	$0 \times a = 0$
$0 \vee A = A$ *(0 élément neutre pour OU)*	$0 + A = A$ *(0 élément neutre pour +)*
$1 \vee A = 1$	

Propriété 1.2. ***[Propriétés de NON]*** *Soient A et B deux booléens.*

1. $\neg(\neg A) = A$ *: NON(NON(A))=A.*
2. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$ *: NON(A ET B)=NON(A) OU NON(B).*
3. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ *: NON(A OU B)=NON(A) ET NON(B).*

Remarque : là encore, $\neg(\neg A) = A$ doit nous faire faire le parallèle avec les réels : $-(-x) = x$.

Les propriétés de ET, OU et NON, couplées au formalisme booléen permettent d'écrire des propositions claires et non ambiguës. En reprenant nos propositions E, F et V des exemples précédents, on peut traduire la proposition $V \wedge (F \vee E)$ par

« le pokémon est de type vol et feu ou électrique ».

Mais cette formulation est ambiguë car elle peut aussi se traduire en langage booléen par $V \wedge F \vee E$. Or l'absence de parenthèses n'est pas anecdotique, elle change radicalement le sens de la phrase car le ET est prioritaire sur le OU ; c'est comme si on écrivait $(V \wedge F) \vee E$. Prenons un pokémon concret : Pikachu.

— $V \wedge F \vee E$: « Pikachu est de type vol et feu ou électrique » est Vrai car Pikachu est de type électrique.

— $V \wedge (F \vee E) = (V \wedge F)) \vee (V \wedge E)$: « Pikachu est de type vol et feu ou vol et électrique » est Fausse car Pikachu n'est pas de type vol.

Le problème des interprétations multiples de propositions écrites en français est très courant en droit ; c'est l'un des grands problèmes des juristes. Comment correctement interpréter une proposition en français ? Comment écrire une proposition de façon non ambiguë ? Le langage booléen lève toute ambiguïté, il est clair et concis.

1.2 Implication

L'implication entre deux propositions A et B est symbolisée par $A \implies B$ et se traduit en français par :

— A implique B ;

— si A alors B ;

— A est une condition suffisante de B ;

— B est une condition nécessaire de A.

Sa définition booléenne est : $A \implies B = (\neg A) \vee B$.

Remarques :

— On dit que A est une condition suffisante de B car il suffit d'avoir A pour avoir B.

— On dit que B est une condition nécessaire de A car on ne peut pas avoir A sans avoir B ; si on a A, on a nécessairement B.

— L'implication $B \implies A$ est dite implication **réciproque** de l'implication $A \implies B$; ce n'est pas parce que l'une des deux implications est vraie que l'autre l'est aussi.

Exemple : Considérons les propositions S : « le pokémon est un Salamèche » et F : « le pokémon est de type feu ».

— L'implication $S \implies F$ est vraie car Salamèche est un pokémon de type feu.

— L'implication $F \implies S$ est fausse car le pokémon pourrait être un autre pokémon de type feu qu'un Salamèche, un Dracaufeu ou un Magmar par exemple.

Propriété 1.3. *Soient A et B deux propositions à valeurs booléennes. Si l'implication $A \implies B$ est vraie, alors l'implication $(\neg B) \implies (\neg A)$ est vraie aussi ; il s'agit de l'implication* ***contraposée****.*

Exemple : en reprenant l'exemple précédent, on voit bien que $(\neg F) \implies (\neg S)$: « si le pokémon n'est pas de type feu, alors ce n'est pas un Salamèche ». Là encore, on remarque que l'implication réciproque n'est pas vraie, ce n'est pas parce que le pokémon n'est pas un Salamèche qu'il n'est pas de type feu, cela pourrait très bien être un Reptincel.

Remarque : les implications sont à la base des instructions conditionnelles : **si** mes conditions sont vérifiées, **alors** j'effectue les instructions associées. Il est donc important de bien comprendre leurs propriétés et leur fonctionnement.

1.3 Les fonctions booléennes

Une fonction booléenne est une application qui, à l'aide des opérations élémentaires (ET, OU et NON) de l'algèbre de Boole, à tout n-uplet de variables booléennes fait correspondre une variable booléenne. Réciproquement, toutes les fonctions booléennes peuvent être obtenues par combinaison des opérateurs NON, OU et ET.

Exemple : considérons la fonction booléenne : $f\,(A\,;B) = (A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$. On obtient sa table de vérité en trouvant chacune des tables intermédiaires des fonctions qui compose f puis en appliquant les règles des ET, OU et NON ci-dessus.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$f\,(A\,;B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

Réciproquement, il est possible de déterminer l'expression d'une fonction booléenne à partir de sa table de vérité. Pour cela, il faut faire la « somme (ou) » de tous les « produits (et) » ayant pour valeur 1. En effet, une fonction étant uniquement déterminée par l'ensemble de ses images, les « produits » ne valant que 0 ou 1 et leur « somme » valant 1 dès l'un le vaut, on obtient ainsi les mêmes images que dans table de vérité. Toutefois, l'expression obtenue est rarement sous forme réduite et nécessite de l'être pour une utilisation optimale.

Exemple : considérons la table de vérité suivante :

A	B	$f\,(A\,;B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Regardons comment obtenir pour image 1. Le premier est obtenu en faisant $(\neg A) \wedge (\neg B)$, en effet, lorsque $A = B = 0$, on a alors $f\,(A\,;B) = 1 = (\neg 0) \wedge (\neg 0)$. Le second est obtenu en faisant $A \wedge (\neg B)$, en effet, lorsque $A = 1$ et $B = 0$, on a alors $f\,(A\,;B) = 1 = 1 \wedge (\neg 0)$. On en déduit que

$$f\,(A\,;B) = [(\neg A) \wedge (\neg B)] \vee [A \wedge (\neg B)].$$

On remarque que cette expression peut être améliorée en factorisant par $\neg B$, ce qui donne

$$f\,(A\,;B) = [(\neg A) \vee A] \wedge (\neg B) = 1 \wedge (\neg B) = \neg B,$$

ce dont on pourra facilement se convaincre en regardant la table de vérité.

1.4 Attendus et savoir-faire

- Connaître les symboles et les tables de vérité des trois opérations booléennes élémentaires.
- Être capable de dresser la table de vérité d'une fonction booléenne.
- Être capable de déterminer l'expression d'une fonction booléenne à partir de sa table de vérité.
- Traduire une situation concrète à l'aide de la logique booléenne et l'analyser.

1.5 Exercices

1.5.1 Démarrage

Exercice 1.1. On note :

- E : « le pokémon est de type eau » ;
- G : « le pokémon est de type glace » ;
- V : « le pokémon est de type vol ».

Écrire en français les propositions suivantes.

1. $E \vee G \vee V$;
2. $E \wedge G \vee V$;
3. $(E \vee G) \wedge V$.

Exercice 1.2. Écrire à l'aide de booléens les propositions suivantes.

1. « Le pokémon est de type eau et glace » ;
2. « Le pokémon est de type eau ou glace » ;
3. « Le pokémon est de type eau mais pas glace » ;
4. « Le pokémon n'est de type ni eau ni glace ».

Exercice 1.3. Dresser la table de vérité de f et g définies par :

1. $f(A\,;B) = (A \vee B) \wedge (A \wedge B)$;

A	B			$f(A\,;B)$

2. $g(A\,;B) = (A \vee B) \vee (A \wedge B)$.

A	B			$g(A\,;B)$

Exercice 1.4. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Et leurs réciproques ?

1. « Si le pokémon est de type feu, alors il est de type vol ».
2. « Le pokémon est un Pikachu ou un Raichu implique qu'il soit électrique ».

Exercice 1.5. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f.

A	B	$f(A\,;B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	$f(A\,;B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

1.5.2 Approfondissement

Exercice 1.6. L'opérateur XOR (e**x**lusive **or**), noté $\oplus$, est très utilisé en électronique, en informatique et en cryptographie. Voici une fonction booléenne équivalente :

$$A \oplus B = ((\neg A) \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)).$$

Dresser sa table de vérité.

XOR						
A	B	$\neg A$	$\neg B$			$A \oplus B$

Exercice 1.7. Construire la table de vérité de la fonction suivante :

$$f(A\,;B\,;C) = (A \wedge B) \vee ((\neg B) \wedge C) \vee (A \wedge (\neg C)).$$

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \wedge B$	$(\neg B) \wedge C$	$A \wedge (\neg C)$	$f(A\,;B\,;C)$
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

Exercice 1.8. [Démonstrations] Démontrer chacune des égalités suivantes en dressant la table de vérité des deux membres puis en vérifiant l'égalité de celles-ci. Soient A, B, C trois booléens.

1. $1 \vee A = 1$.
2. $0 \vee A = A$.
3. $1 \wedge A = A$.
4. $0 \wedge A = 0$.
5. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
6. $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.
7. $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Exercice 1.9. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Et leurs réciproques ?

1. « Si le pokémon est un Bulbizarre, un Salamèche ou un Carapuce, alors il est de type plante, feu et eau ».
2. « Le pokémon est un Bulbizarre, un Salamèche ou un Carapuce, alors il est de type plante, feu ou eau ».
3. « Il suffit que le pokémon soit un Carapuce pour qu'il puisse évoluer en Carabaffe ».
4. « Il est nécessaire que le pokémon soit un Lokhlass pour qu'il soit de type glace ».

Exercice 1.10. [Implication] L'implication est symbolisée par $\Longrightarrow$ et se définit comme suit : $A \Longrightarrow B = (\neg A) \vee B$.

1. Dresser la table de vérité de l'implication.
2. Montrer que $A \Longrightarrow B = (\neg B) \Longrightarrow (\neg A)$.
3. Quel est le contraire d'une implication : $\neg(A \Longrightarrow B)$? Autrement dit, quand est-ce qu'une implication est fausse ?

Exercice 1.11. [Équivalence] L'équivalence est symbolisée par $\Longleftrightarrow$ et se définit comme suit : $A \Longleftrightarrow B = (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$.

1. Dresser la table de vérité de l'équivalence.
2. Montrer que $A \Longleftrightarrow B = (\neg A) \Longleftrightarrow (\neg B)$.

Exercice 1.12. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f.

A	B	C	$f(A;B;C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A	B	C	$f(A;B;C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Exercice 1.13. [Interrupteurs]

1. Quand deux interrupteurs sont en parallèle, la lumière s'allume quand l'un d'eux est fermé.
2. Quand ils sont en série, la lumière s'allume quand les deux sont fermés.
3. Quand ils sont en va-et-vient, la lumière s'allume quand les deux sont fermés ou les deux sont ouverts.

On pose :

— I_n est à 0 quand l'interrupteur n est ouvert.

— I_n est à 1 quand l'interrupteur n est fermé.

Dresser la table de vérité de la fonction booléenne de chacun des trois cas ci-dessus puis exprimer ces fonctions à l'aide d'opérateurs booléens.

I_1	I_2	Parallèle

I_1	I_2	Série

I_1	I_2	Va-et-vient

Exercice 1.14. [Je mens] Sur une planète vivent les Purs (qui disent toujours la vérité) et les Pires (qui mentent toujours). Vous croisez deux personnes A et B sur cette planète. A affirme : « Au moins l'un de nous deux est un Pire ». Notons :

a : « A est un Pur » ;

b : « B est un Pur ».

À l'aide d'une table de vérité, dire ce que sont A et B.

Exercice 1.15. [Logique royale] Alors que vous déambuliez tranquillement dans les rues de la glorieuse cité de Vérité, capitale du non moins glorieux pays Booléen, vous êtes arrêté pour tentative de corruption sur l'un des Poneys Royaux. Le témoignage du Poney Royal est accablant, vous ne pouvez échapper à votre sort et allez être conduit devant le Roi George 1 – dit le Vrai –, afin d'être jugé.

Amené dans la salle du trône, vous avez devant vous le Roi George et sa cour de booléens. Le procureur du Roi, implacable, commence son réquisitoire, témoignage du Poney Royal à l'appui. Votre culpabilité, évidente, va être actée, la sentence royale prononcée. Le procès se déroule sous votre regard flou et votre oreille sourde.

Alors que le tumulte ayant suivi la fin du réquisitoire s'affaiblit, le Roi George se lève et le silence se fait. Il annonce vouloir vous mettre à l'épreuve. Devant vous sont apportés deux coffres. Le Roi vous explique que chaque coffre contient soit un 1, soit un 0. Si vous choisissez un coffre avec un 1, votre peine sera commuée en travaux d'intérêts équestres, sinon vous serez jeté en pâture aux Caribous Belliqueux. Afin de vous mettre encore plus à l'épreuve, les deux coffres contiennent parfois tous deux un 1, mais aussi parfois tous deux un 0 et parfois l'un contient un 1 et l'autre un 0.

Le Roi George, sûr de sa supériorité, vous donne par ailleurs des indications. Voici les inscriptions notées sur les coffres :

Coffre 1 (I1) : « Il y a un 1 dans ce coffre et un 0 dans l'autre. »

Coffre 2 (I2) : « Il y a un 1 dans l'un des coffres et un 0 dans l'autre. »

Enfin, le sourire aux lèvres, le roi vous annonce qu'une seule des deux inscriptions est correcte. On note

C1 : « La coffre 1 contient un 1. »

C2 : « La coffre 2 contient un 1. »

1. Traduire les affirmations I1 et I2 inscrites sur les portes à l'aide des propositions C1 et C2 et des connecteurs logiques (et, ou , non).
2. Dresser la table de vérité des affirmations I1 et I2 à partir de C1 et C2.
3. Conclure sur le choix que vous devez faire afin de ne pas finir jeté en pâture aux Caribous.

Exercice 1.16. [Logique royale, retour en enfer] Après avoir échappé au supplice des Caribous Belliqueux et fini vos travaux d'intérêts équestres, et alors que vous vous apprêtiez à quitter la glorieuse capitale de Vérité, vous êtes capturé par le terrible groupe des Mouettes Renégates. Celles-ci vous ligotent et bâillonnent avant de vous entraîner dans les souterrains de la ville. Après un temps indéterminé, vos ravisseuses vous libèrent et vous découvrez ainsi que vous êtes en plein cœur du légendaire palais d'ombre, résidence de George 0 – dit le Faux –, jumeau maléfique de George 1. Celui-ci veut vous entraîner dans son complot visant à destituer son frère. Mais pour être certain que vous êtes apte à participer à cette dangereuse entreprise, il désire d'abord vous éprouver.

Il place alors devant deux coffres et vous explique qu'il va vous soumettre à la même épreuve que son frère afin d'être sûr que vous ne l'avez pas réussie par hasard. Les deux indications sur les coffres sont les suivantes.

Coffre 1 (I1) : « Au moins l'un des deux coffres contient un 1. »

Coffre 2 (I2) : « L'autre coffre contient un 0. »

Il vous prévient, choisissez le bon coffre car sinon vous serez jeté en pâture aux Mouettes Renégates.

1.5.3 Entraînement

Exercice 1.17. On note :

— E : « le pokémon est de type eau » ;
— G : « le pokémon est de type glace » ;
— V : « le pokémon est de type vol ».

Écrire en français les propositions suivantes.

1. $E \wedge V$;
2. $(\neg E) \vee (\neg G)$;
3. $(E \wedge G) \vee (\neg V)$.

Exercice 1.18. Écrire à l'aide de booléens les propositions suivantes.

1. « Le pokémon n'est pas de type eau » ;
2. « Le pokémon est de type glace mais pas eau » ;
3. « Le pokémon n'est pas de type eau ou n'est pas de type glace » ;
4. « Le pokémon est soit de type eau soit de type glace ».

Exercice 1.19. Dresser la table de vérité de f et g définies par :

1. $f(A ; B) = \neg(A \vee B)$;
2. $g(A ; B) = \neg(A \wedge B)$.

Exercice 1.20. Construire la table de vérité de la fonction suivante :

$$f(A ; B ; C) = \neg(A \wedge C) \vee ((\neg B) \wedge (\neg C)).$$

Exercice 1.21. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction booléenne f.

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	$f(A;B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0