Chapitre 9

Variables aléatoires

9.1 Variable aléatoire

Définition 9.1. *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On suppose qu'une loi de probabilité est définie sur Ω. On appelle **variable aléatoire** toute fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$: pour toute issue $\omega \in \Omega$,*

$$X : \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Exemple : On lance à deux reprises une pièce de monnaie équilibrée. L'univers associé à cette expérience est l'ensemble :

$$\Omega = \{PP\,;PF\,;FP\,;FF\}.$$

On définit la variable aléatoire X associant à chaque tirage le nombre de fois que « pile » a été obtenu. On peut ainsi écrire :

$$X(PP) = 2,\ X(PF) = 1.$$

ou de manière plus condensée :

issue ω_i	PP	PF	FP	FF
$X(\omega_i)$	2	1	1	0

Exemple : On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6. Le résultat de cette expérience est le couple constitué des faces visibles de chaque dé. L'univers de cette expérience est donc l'ensemble des couples $(x\,;y)$ où x et y sont deux entiers compris entre 1 et 6 :

$$\Omega = \{(1\,;1)\,;(1\,;2)\,;(1\,;3)\ldots(6\,;5)\,;(6\,;6)\}.$$

On définit la variable aléatoire X, associant à chaque issue la somme des deux dés. Ainsi $X((1;1)) = 2$ et $X((5;3)) = 8$. La valeur de X pour chaque issue peut être représentée dans le tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Par commodité, on note $X = 6$ l'événement contenant les issues dont l'image par X vaut 6. On a donc :

$$(X = 6) = \{(1\,;5)\,;(2\,;4)\,;(3\,;3)\,;(4\,;2)\,;(5\,;1)\}.$$

Les issues favorables à cet événement sont représentées en gris clair dans le tableau. Les dés étant supposés équilibrés, nous sommes en situation d'équiprobabilité. On peut donc calculer :

$$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement } X = 5}{\text{nombre d'issues de } \Omega} = \frac{5}{36}.$$

Représenter la loi de probabilité d'une variable de X consiste à associer à chacune de ses valeurs x_i la probabilité de l'événement $X = x_i$:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

★ Vidéo.

Définition 9.2. *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On suppose qu'une loi de probabilité est définie sur Ω. Soient X une variable aléatoire sur Ω et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la variable aléatoire $Y = f(X)$ sur Ω par*

$$Y(\omega) = f(X(\omega)),$$

pour toute issue $\omega \in \Omega$.

Exemples :

1. On considère la variable aléatoire X définie sur un univers Ω à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ telle que
$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}.$$
Alors les variables aléatoires définies par $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$ sont à valeurs dans $\{1, 3, 5\}$ et $\{0, 1, 4\}$ respectivement ; et
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 5) = \frac{1}{3},$$
et
$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 4) = \frac{1}{3}.$$

2. On considère la variable aléatoire X définie sur un univers Ω à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que
$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}.$$
Alors la variable aléatoire définie par $Y = X^2$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et
$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{3}.$$
Contrairement à l'exemple ci-dessus, on voit que non seulement la taille de l'ensemble des images de Y est différente de celle de X mais aussi que les probabilités des réalitions de Y ne sont plus directement indexées sur celles de X ; il s'agit donc d'être vigilant dans ces cas là.

9.2 Espérance

Définition 9.3. *On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω sur lequel est défini une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, ses valeurs sont notées $x_1, x_2, \ldots x_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.* ***L'espérance*** *de X est le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par :*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathbb{P}(X = x_i) = x_1\mathbb{P}(X = x_1) + x_2\mathbb{P}(X = x_2) + \cdots + x_n\mathbb{P}(X = x_n).$$

Exemple On considère l'expérience précédente. Par définition :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3) + \cdots + 12 \times \mathbb{P}(X = 12)\\ &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 12 \times \frac{1}{36}\\ &= \frac{252}{36}\\ &= 7.\end{aligned}$$

Propriété 9.1. *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini. Soient a et b deux nombre réels. On a :*
$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Démonstration.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + b) &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b)\mathbb{P}(X = x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[ax_i\mathbb{P}(X = x_i) + b\mathbb{P}(X = x_i)\right]\\ &= a\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbb{P}(X = x_i) + b\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X = x_i)\\ &= a\mathbb{E}(X) + b.\end{aligned}$$

□

Exemple : Soit X une variable aléatoire d'espérance 40 et d'écart-type 15. On définit la variable Y par $Y = -5X + 20$, on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(-5X + 20) \\ &= -5\mathbb{E}(X) + 20 \\ &= -180.\end{aligned}$$

Remarque : cette propriété est appelée *linéarité* de l'espérance.

★ Vidéo.

9.3 Variance

Définition 9.4. *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini. On appelle **variance** de X le nombre défini par :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

Théorème 9.1. *(Huyghens-König)*
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini. On a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i)\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque : Cette dernière formulation permet d'exploiter la calculatrice pour déterminer la variance d'une variable aléatoire. On entre les valeurs prises X dans la colonne $\mathtt{L_1}$ et les probabilités associées dans $\mathtt{L_2}$. Il suffit alors de saisir $\boxed{\mathtt{Stats\,1 - Var\,L_1, L_2}}$ et de calculer :

$$\mathtt{\Sigma x^2} - (\mathtt{\Sigma x})^2.$$

Définition 9.5. *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini. On appelle **écart-type** de X le nombre défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarque : La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire sont deux indicateurs positifs. L'espérance, elle, peut être négative.

Propriété 9.2. *Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini. Soient a et b deux nombres réels. On a :*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X).$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple : On reprend l'exemple avec X une variable aléatoire d'espérance 40 et d'écart-type 15 et où on définit la variable Y par $Y = -5X + 20$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= (-5)^2 \times \mathbb{V}(X) \\ &= 25 \times \sigma(X)^2 \\ &= 5625. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &= |-5| \times \sigma(X) \\ &= 5 \times 15 \\ &= 75. \end{aligned}$$

Remarque : cette propriété peut aussi être signifiée en disant que la variance est *quadratique*.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

9.4 Attendus et savoir-faire

- Maîtrise de la terminologie des événements, de leur union et de leur intersection.
- Calculer les probabilités des unions, intersections et contraire d'événements.
- définir une variable aléatoire.
- déterminer et utiliser une loi de probabilités.
- Calculer une espérance.
- Utiliser la propriété de linéarité de l'espérance.
- Calculer une variance et un écart-type.
- Utiliser les propriétés sur la variance.

9.5 Exercices

9.5.1 Démarrage

Exercice 9.1. On lance simultanément deux dés 6 équilibrés. Dans chaque cas, donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

1. X associe à chaque lancer le maximum des nombres obtenus.
2. X associe à chaque lancer le produit des nombres obtenus.

Exercice 9.2. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la valeur de p afin que le tableau soit celui d'une loi de probabilité.

x_i	-2	3	7
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	p

x_i	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Exercice 9.3. On tire au hasard une carte dans un jeu en contenant 32. Dans chaque cas déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X associant la carte au nombre de points obtenus.

1. On gagne 10 points pour une figure, 3 pour un dix et 1 pour le reste.
2. On gagne 21 points pour un as, 18 pour une dame rouge, 15 pour un roi ou un valet ; on en perd 6 pour le reste.

Exercice 9.4. Déterminer l'espérance des variables aléatoires de l'exercice précédent.

Exercice 9.5. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la valeur de a pour que la variable aléatoire X vérifie $\mathbb{E}(X) = 0$.

x_i	-2	3	a
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,3$	$0,5$	$0,2$

x_i	-5	1	8	9	a
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,1$	$0,3$	$0,2$	$0,3$	$0,1$

Exercice 9.6. Déterminer la variance des variables aléatoires de l'exercice 9.3.

Exercice 9.7. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = -3$ et $\mathbb{V}(X) = 2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

1. $Y = 3X + 5$.
2. $Y = -5X + 8$.
3. $Y = -2X$.

9.5.2 Approfondissement

Exercice 9.8. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	-1	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,2$	$2p$	$3p$	$0,09$	$0,16$	$0,3$

1. Déterminer la valeur de p.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq 3)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ et $\mathbb{P}(1 < X < 4)$.

Exercice 9.9. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![1\,;5]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![1\,;4]\!]$, $\mathbb{P}(X = k+1) = 0,6\mathbb{P}(X = k)$. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 9.10. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,1$	$0,15$	$0,11$	$0,14$	$0,21$	$0,29$

1. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
2. Soient les variables aléatoires $Y = X + 4$ et $Z = -3X + 1$.
   (a) Donner les lois de probabilités de Y et Z.
   (b) Calculer leurs espérances et écart-types.

Exercice 9.11. [Algorithme, Python] Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	-4	0	3	6
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$0,15$	$0,4$	$0,26$	$0,19$

1. Retranscrire le programme ci-dessous à gauche sous forme d'algorithme puis compléter l'algorithme et le programme afin qu'ils simulent la variable aléatoire X.
2. Retranscrire le programme ci-dessous à droite simulant la variable aléatoire Y sous forme d'algorithme puis donner sa loi de probabilité.

```
import random

def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.15:
        return ...
    if alea<0.55:
        return ...
    if alea<...:
        return ...
    return ...
```

```
import random

def simu_Y():
    alea=random.random()
    if alea<0.05:
        return 0
    if alea<0.28:
        return 2
    if alea<0.5:
        return 4
    return 5
```

Exercice 9.12. [Algorithme, Python] Soient X et Y deux variables aléatoires simulées par des programmes comme dans l'exercice 9.11. On considère les programmes ci-dessous.

```
from simu_X import *

n=1000
moy=0

for simu in range(n):
    moy=moy+simu_X()
moy=moy/n
print(moy)
```

```
from ... import *

n=...
moy=...

for ... in range(...):
    moy=...
moy=...
print(moy)
```

1. Retranscrire le programme de gauche sous forme d'algorithme. Que fait-il ?
2. Compléter le programme de droite afin qu'il donne une estimation de l'espérance de la variable aléatoire Y pour 100 000 réalisations de celle-ci.
3. Mettre en œuve ces programmes pour les variables aléatoires de l'exercice 9.11 ; on pourra comparer les résultats empiriques aux résultats théoriques.

Exercice 9.13. Un jeu consiste à miser de l'argent sur un lancer de dé 6 équilibré. Si le résultat est inférieur ou égal à 3, on perd un euro ; si le résultat est 4, on ne perd ni ne gagne ; sinon, on gagne x euros. Déterminer les valeurs de x pour que le jeu soit équitable, favorable, défavorable.

Exercice 9.14. [Génétique] On s'intéresse à deux allèles d'un gène : A et a. L'allèle A est dominant et a est récessif : les individus de génotype AA et Aa ont l'expression dominante et seul les individus de génotype aa ont l'expression récessive. Au moment de la gamétogenèse, chaque gamète a la même probabilité de recevoir l'un de ces deux allèles.

1. Deux individus de génotype Aa se reproduisent.
   (a) Quelle est la probabilité que leur descendant ait au moins un allèle a ?
   (b) Quelle est la probabilité que leur descendant présente l'expression récessive ?
2. Les deux individus de génotype Aa ont quatre descendants. On note R la variable aléatoire comptant le nombre de descendants présentant l'expression récessive.
   (a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
   (b) Est-il vrai qu'il a plus d'une chance sur deux qu'au moins un de leurs descendants présente l'expression récessive ?
   (c) Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire R.

Exercice 9.15. [Création d'un jeu] Un jeu de grattage a pour caractéristiques :

— on doit payer 2€ pour jouer ;

— on peut gagner 0€, 2€, 10€ ou 100€ ;

— on a deux fois plus de chance de gagner 10€ que 100€ ;

— on a une chance sur quatre de récupérer sa mise ou de remporter un gain.

On note X la variable aléatoire donnant le montant du gain d'un ticket et $p = \mathbb{P}(X = 100)$.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Quelles sont les valeurs maximales et minimales que peut prendre p ?
3. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de p.
4. Déterminer la valeur de p pour que le jeu soit équitable, rentable ou à l'avantage du joueur.

Exercice 9.16. [*] On s'intéresse à l'équation $x^2 + bx + c = 0$ où b et c sont deux entiers naturels tirés aléatoirement entre 1 et 6. On note X la variable aléatoire qui associe au résultat de ces tirages le nombre de solution de notre équation.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 9.17. [**] Un dé a six faces marquées : 0, 0, 0, 1, 1 et 4. Le joueur 1 lance une fois le dé marque les points correspondant au nombre obtenu. Le joueur 2 lance deux fois le dé et les points correspondant au produit des deux nombres obtenus. Qui du joueur ou du joueur 2 marque le plus de points en moyenne ?

Exercice 9.18. [Stratégie, Star Wars,]** Un groupe de rebelles attaque régulièrement des bases et des croiseurs de l'Empire dans le secteur galactique géré par Dark Vador. Il observe :

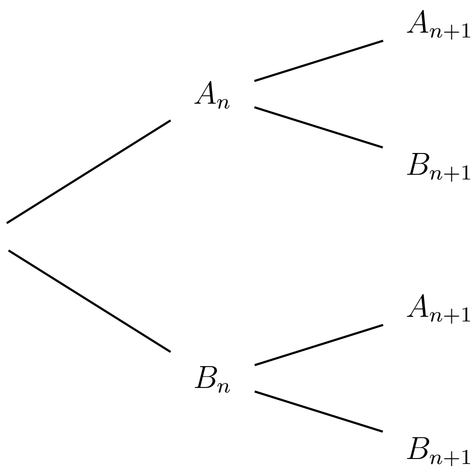
— si les rebelles ont attaqué un croiseur un jour, ils en attaqueront un autre le lendemain avec une probabilité de 0,7 ;

— si les rebelles ont attaqué une base impériale un jour, la probabilité qu'ils en attaquent une autre le lendemain est 0,5.

Le premier jour des observations de Dark Vador, les rebelles attaquent un croiseur. On définit les événements suivants pour tout entier naturel n non nul :

— A_n : « Un croiseur est attaqué le jour n », de probabilité a_n.

— B_n : « Une base impériale est attaquée le jour n » de probabilité b_n.



1. (a) Déterminer a_1 et b_1, puis a_2 et b_2.
   (b) Déterminer la probabilité qu'une base impériale soit attaquée le troisième jour.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $b_n = 1 - a_n$.
   (b) Compléter l'arbre ci-contre.
   (c) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (d) En déduire que $a_{n+1} = 0,2a_n + 0,5$.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = a_n - 0,625$.
   (a) Calculer u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   (c) Après avoir exprimé le terme général u_n en fonction de n, montrer que, pour tout entier naturel n non nul $a_n = 0,375 \times 0,2^{n-1} + 0,625$.
4. (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Pendant combien de jours consécutifs des croiseurs sont attaqués avec une probabilité supérieure ou égale à 0,63 ?

Exercice 9.19. [Jeu,*]** Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert. Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.
Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.
Si le secteur repéré est blanc, il perd 12 €.
Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :

— si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 € ;
— s'il est blanc, il perd 2 € ;
— s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts (où $n \geqslant 1$).
Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. (a) Déterminer la loi de probabilité de X_1.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X_1.
2. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
3. Montrer que l'espérance mathématique de X_n vérifie $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{16n}{(n+7)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$..
4. Étudier le sens de variation de la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$.
5. En déduire la valeur de l'entier n pour laquelle l'espérance mathématique de X_n est maximale. Quelle est la valeur correspondante de $\mathbb{E}(X_n)$?

9.5.3 Entraînement

Exercice 9.20. On lance simultanément deux dés 6 équilibrés. Soit la variable aléatoire X qui associe aux deux nombres obtenus la soustraction du plus grand par le plus petit.

1. Donner les valeurs prises par X.
2. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 9.21. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la valeur de a pour que la variable aléatoire X vérifie $\mathbb{E}(X) = 1$.

x_i	-4	-2	a
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,4$	$0,3$	$0,3$

x_i	-6	-3	0	4	a
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,1$	$0,4$	$0,2$	$0,1$	$0,2$

Exercice 9.22. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 4$ et $\mathbb{V}(X) = 3$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

1. $Y = 7X - 3$.
2. $Y = -X - 9$.
3. $Y = 16X$.

Exercice 9.23. Un jeu consiste à miser de l'argent sur un lancer de dé 10 équilibré. Si le résultat est inférieur ou égal à 6, on perd un euro ; si le résultat est 7 ou 8, on ne perd ni ne gagne ; sinon, on gagne x euros. Déterminer les valeurs de x pour que le jeu soit équitable, favorable, défavorable.

9.6 Étude

Le césium est un atome comportant sous forme stable 55 protons et 78 neutrons ; il s'agit du césium 133. Toutefois, suite à l'utilisation d'armes nucléaires ou des accidents nucléaires, on peut retrouver dans la nature un autre isotope du césium, radioactif, le césium 137 qui comporte 82 neutrons au lieu de 78. Étant radioactif, il va se désintégrer et sa désintégration est assimilable à une expérience aléatoire.

Chaque année, un atome de césium 137 a une probabilité 0,0225 de se désintégrer ; on note $\{A = k\}$ l'événement l'atome se désintègre à l'année k. On étudie cet atome pendant au maximum n année.

1. On suppose ici $n = 3$.
   (a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A = 1)$.
   (c) Calculer la probabilité que l'atome mette moins de deux ans à se désintégrer.
2. **[Python]** On suppose maintenant $n = 120$. Le programme ci-dessous permet de simuler l'âge auquel un atome de Césium 137 se désintègre et d'estimer la probabilité qu'un atome se désintègre avant un âge déterminé en simulant un échantillon d'un certain nombre d'atomes ; plus l'échantillon sera grand, plus l'estimation sera précise.
   (a) Recopier le compléter le programme Python ci-dessous (en prenant soin de conserver sa structure) afin qu'il estime $\mathbb{P}(A \leq 30)$ puis expliquer la phrase suivante : « le temps de demi-vie du césium 137 est de 30 ans ».
   (b) Estimer la probabilité qu'un atome de césium 137 ne soit pas désintégré au bout de 60 ans.
   (c) Estimer l'espérance de la variable aléatoire A à l'aide d'un programme en Python. Interpréter cette valeur.

```
import random

def simu_Cs137():
    A=1
    while random.random()>... and A<=120:
        A=A+1
    return A

def estimation(nombre_atome_simu):
    s=0
    for exp in range(nombre_atome_simu):
        if 1<=simu_Cs137()<=...:
            s=s+1
    return...
```