Chapitre 8

Suites usuelles

8.1 Suites arithmétiques

8.1.1 Définition

Définition 8.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***arithmétique*** *s'il existe un nombre réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples : Les suites définies par $u_0 = 2$, respectivement $v_2 = 3$, et $u_{n+1} = u_n + 3$, respectivement $v_{n+1} = v_n - 4$, sont des suites arithmétiques de raison 3 et -4.

★ Vidéo.

8.1.2 Terme général

Théorème 8.1. *Soient r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Quels que soient les entiers naturels n et p, on a :*

$$u_n = u_0 + n \times r, \qquad u_n = u_1 + (n-1) \times r, \qquad u_n = u_p + (n-p) \times r.$$

Démonstration. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison r. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{k+1} = u_k + r.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + r) \\ \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \sum_{k=0}^{n-1} r \\ \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n &= u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k + n \times r \\ u_n &= u_0 + n \times r. \end{aligned}$$

On a donc obtenu la première égalité. La seconde est un cas particulier de la troisième qui s'obtient en adaptant les égalités ci-dessus. ☐

Exemples : En reprenant l'exemple précédent, on trouve que $u_n = 2+3n$ et $v_n = 3-4(n-2)$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on sait que $u_3 = 24$ et $u_8 = 74$. On sait que, si $p < n$,

$$u_n = r \times (n-p) + u_p.$$

Avec $p = 3$ et $n = 8$, on a alors $u_8 = r \times (8-3) + u_3$, ou encore $74 = 5r + 24$. On en déduit que la raison de notre suite est $r = 10$; reste à déterminer son terme initial u_0. On sait que $u_3 = 3r + u_0$, donc que $u_0 = u_3 - 3r = 24 - 30 = -5$.

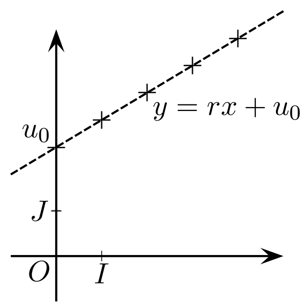
Notre suite a donc pour terme général $u_n = -5 + 10n$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

Corollaire Soient $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Les points de la représentation graphique de u sont alignés.

Démonstration. Soit u suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r. En vertu du théorème précédent, on peut écrire : $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = rx + u_0$. ☐

Remarque : une suite arithmétique est donc une discrétisation d'une fonction affine.



8.1.3 Variations d'une suite arithmétique

Propriété 8.1. *Soient r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.*

— *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.*
— *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.*
— *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $r = 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = r$. On considère alors le signe de r. ☐

Exemples :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = 5$ et avec $u_0 = 0$ est croissante : on a

$$0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25...$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = 0$ et avec $u_0 = 2$ est constante égale à 2 : on a

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2...$$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r=-3$ et avec $u_0=2$ est décroissante : on a
$$2,\ -1,\ -4,\ -7,\ -10,\ -13...$$

★ Vidéo.

8.1.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 8.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Quels que soient les entiers naturels n et p tels que $p \leq n$:*
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}, \qquad \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\times\frac{u_p+u_n}{2}.$$

Remarque On peut retenir la formulation :
$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Démonstration. On note S la première somme recherchée. On a alors :
$$S=\sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad S=\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

En sommant ces deux égalités, on obtient :
$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{k=0}^{n}(u_k+u_{n-k}) \\
2S &= \sum_{k=0}^{n}(u_0+kr+u_0+(n-k)r) \\
2S &= \sum_{k=0}^{n}(u_0+u_0+nr) \\
2S &= \sum_{k=0}^{n}(u_0+u_n) \\
2S &= (n+1)(u_0+u_n) \\
S &= (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}.
\end{aligned}$$

□

Exemples :

1. On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r=-4$ et de premier terme $u_0=4$. On a donc $u_{100}=4-4\times 100=-396$. La somme des cent premiers termes de cette suite est :
$$\sum_{k=0}^{100} u_k = 101\times\frac{4-396}{2} = -19796.$$

2. On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = 4$ et de premier terme $u_5 = 3$. On a donc $u_{30} = 3 + 4 \times (30 - 5) = 103$. La somme des trente premiers termes de cette suite est :
$$\sum_{k=5}^{30} u_k = 26 \times \frac{3+103}{2} = 1378.$$

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

8.2 Suites géométriques

8.2.1 Définition

Définition 8.2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
$$u_{n+1} = u_n \times q.$$
*Le réel q est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemples : Les suites définies par $u_0 = 2$, respectivement $v_2 = 3$, et $u_{n+1} = 3u_n$, respectivement $v_{n+1} = -4v_n$, sont des suites arithmétiques de raison 3 et -4.

★ Vidéo.

8.2.2 Terme général

Théorème 8.3. *Soient q un nombre réel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Quels que soient les entiers naturels n et p, on a :*
$$u_n = u_0 \times q^n, \qquad u_n = u_1 \times q^{n-1}, \qquad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Démonstration. Soient $q \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite géométrique de raison q. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{k+1} = u_k \times q$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} u_{k+1} &= \prod_{k=0}^{n-1} (u_k \times q)\\ \prod_{k=1}^{n} u_k &= \prod_{k=0}^{n-1} u_k \times \prod_{k=0}^{n-1} q\\ \prod_{k=1}^{n-1} u_k \times u_n &= u_0 \times \prod_{k=1}^{n-1} u_k \times q^n\\ u_n &= u_0 \times q^n.\end{aligned}$$
On a donc obtenu la première égalité. La seconde est un cas particulier de la troisième qui s'obtient en adaptant les égalités ci-dessus. □

Exemples : En reprenant l'exemple précédent, on trouve que $u_n = 2\times 3^n$ et $v_n = 3\times(-4)^{n-2}$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique dont on sait que $u_3 = 24$ et $u_8 = 768$. On sait que, si $p < n$,

$$u_n = q^{n-p}u_p.$$

Avec $p = 3$ et $n = 8$, on a alors $u_8 = q^{8-3}u_3$, ou encore $768 = q^5 \times 24$. On en déduit que $q^5 = \dfrac{768}{24} = 32$, donc que $q = 32^{\frac{1}{5}} = 2$. On a donc déterminé la raison de notre suite : $q = 2$; reste à déterminer son terme initial u_0. On sait que $u_3 = q^3u_0$, donc que $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{24}{2^3} = \dfrac{24}{8} = 3$.

Notre suite a donc pour terme général $u_n = 3 \times 2^n$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

8.2.3 Variation d'une suite géométrique

Propriété 8.2. *Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. On suppose que $u_0 > 0$.*

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $q > 1$;*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$;*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $q = 1$;*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $q < 0$.*

Exemples :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 5$ et avec $u_0 = 2$ est croissante : on a
$$2,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ 6250...$$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 1$ et avec $u_0 = 2$ est constante égale à 2 : on a
$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2...$$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et avec $u_0 = 2$ est décroissante : on a
$$2,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{25},\ \frac{2}{125},\ \frac{2}{625},\ \frac{2}{3125}...$$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = -5$ et avec $u_0 = 2$ est alterné :
$$2,\ -10,\ 50,\ -250,\ 1250,\ -6250...$$

★ Vidéo.

8.2.4 Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 8.4. *Soient $q \in \mathbb{R}$ distinct de 1 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Quels que soient les entiers naturels n et p tels que $p \leq n$:*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Remarque On peut retenir la formulation :

$$\text{Somme} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}.$$

Démonstration. On note S la première somme recherchée :

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k. \tag{8.1}$$

En multipliant (8.1) par q, on obtient :

$$qS = \sum_{k=0}^{n} q \times u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k. \tag{8.2}$$

On soustrait alors (8.2) à (8.1) :

$$\begin{aligned} S - qS &= u_0 - u_{n+1} \\ (1-q)S &= u_0 - u_0 \times q^{n+1} \\ S &= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

□

Exemples :

1. On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 0.5$ et de premier terme $u_0 = 4$. La somme des cent premiers termes de cette suite est :

$$\sum_{k=0}^{100} u_k = 4\frac{1-0.5^{101}}{1-0.5} = 4\frac{1-0.5^{101}}{0.5} = 8(1-0.5^{101}) \simeq 8.$$

2. On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 4$ et de premier terme $u_5 = 3$. La somme des trente premiers termes de cette suite est :

$$\sum_{k=5}^{30} u_k = 3\frac{1-4^{30-5+1}}{1-4} = 3\frac{1-3^{26}}{-3} = 3^{26} - 1 = 2541865828328.$$

★ Vidéo.

8.3 Attendus et savoir-faire

— Déterminer si une suite est arithmétique / géométrique ou non.
— Passer de la relation de récurrence d'une suite arithmétique / géométrique à son terme général et inversement.
— Déterminer les variations d'une suite arithmétique / géométrique.
— Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique / géométrique.
— Modéliser un problème par une suite arithmétique / géométrique.

8.4 Exercices

8.4.1 Démarrage

Exercice 8.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Dans chaque cas, calculer u_1, u_2 et u_3.

1. $u_0 = 1$ et $r = 3$.
2. $u_0 = 5$ et $r = -2$.
3. $u_0 = -2$ et $r = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 8.2. Donner le terme général des suites de l'exercice 8.1.

Exercice 8.3. Donner les variations des suites de l'exercice 8.1.

Exercice 8.4. Donner la somme des 100 premiers termes des suites de l'exercice 8.1.

Exercice 8.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Dans chaque cas, calculer u_1, u_2 et u_3.

1. $u_0 = 1$ et $q = 3$.
2. $u_0 = 5$ et $q = -2$.
3. $u_0 = -2$ et $q = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 8.6. Donner le terme général des suites de l'exercice 8.5.

Exercice 8.7. Donner les variations des suites de l'exercice 8.5.

Exercice 8.8. Donner la somme des 100 premiers termes des suites de l'exercice 8.5.

8.4.2 Approfondissement

Exercice 8.9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_0 = 1$ et $u_3 = 5$.
2. $u_1 = -5$ et $u_9 = -7$.
3. $u_{10} = 0$ et $u_{15} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 8.10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n+1) - f(n)$.

1. Calculer u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.

Exercice 8.11. [Sylviculture] Un arbre mesurant 1m lors de sa plantation voit sa hauteur augmenter chaque année de la même longueur. On note u_0 sa hauteur initiale et u_n sa hauteur n année après sa plantation.

1. Sachant que l'arbre a doublé de hauteur en deux ans, de combien a-t-il poussé chaque année ?
2. Par quelle nombre sera multiplié sa hauteur initiale au bout de quatre ans ?
3. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Exprimer u_n en fonction de n.
4. Au bout de combien d'année la hauteur dépassera 25m ?

Exercice 8.12. [Écureuil] Un écureuil décide de faire des réserves de noisettes pour l'hiver. Le premier jour, il compte le nombre de noisettes qu'il lui reste en réserve : il en a 40. À partir du second jour, il ajoute 10 noisettes supplémentaires à son stock chaque jour. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre de noisettes en réserve au n-ème jour de récolte, ainsi $u_0 = 40$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser sa raison.
3. Donner l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. L'écureuil estime qu'il a besoin de 500 noisettes en réserve pour passer l'hiver. Au bout de combien de jours aura-t-il atteint ce nombre ?

Exercice 8.13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_0 = 1$ et $u_3 = 5$.
2. $u_1 = -5$ et $u_9 = -7$.
3. $u_{10} = 1$ et $u_{15} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 8.14. [Origami, algorithme] Une feuille de papier a une épaisseur de 0,15mm ; on note e_0 cette épaisseur. Chaque fois qu'on l'on plie la feuille en deux, son épaisseur double ; on note e_n son épaisseur après n pliages.

1. Calculer e_1 et e_2.
2. Quelle est la nature de la suite (e_n) ? Donner son terme général.
3. Écrire un algorithme donnant le nombre de pliage nécessaire pour que l'épaisseur de la feuille soit aussi grande que la distance Terre Soleil.
4. Réaliser cet algorithme en Python ou à l'aide d'un tableur.

Exercice 8.15. [L'échiquier de Sissa] La légende raconte qu'un antique roi des Indes – afin de tromper l'ennui – demanda à ce qu'on lui crée un jeu ; c'est ainsi qu'un sage nommé Sissa inventa alors un jeu d'échecs. Pour le remercier, le roi lui offrit le choix de sa récompense ; Sissa lui répondit alors « Sire, placez un grain de riz sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre de grain de riz... Je prendrai tout le riz sur le plateau ! ». Le roi, trouvant cette demande bien modeste, l'accepta.
On note u_n le nombre de grain de riz sur la n-ème case du plateau.

1. Donner les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner son terme général.
3. Déterminer le nombre de grain de riz présent sur les 64 cases du plateau.
4. Sachant que qu'un grain de riz pèse environ $5 \cdot 10^{-2}$g et que la production mondiale de riz en 2018 a atteint 779Mt, que pensez-vous de la demande de Sissa ?

Exercice 8.16. [Économie et écologie,*] La croissance économique désigne en général la croissance d'un indicateur économique : le PIB (Produit Intérieur Brut). Il s'agit de la somme des biens et services produits par un pays en une année. Bien évidemment la créations de bien et services nécessitent énergie et ressources, ce qui engendre déchets et pollutions. La croissance du PIB s'accompagne donc d'une croissance de la consommation d'énergie et des ressources ainsi que de la pollution. À des fins de simplification, nous ne considérerons que la pollution émise sous forme de gaz à effet de serre en équivalent CO_2 (il est difficile de quantifier les nombreuses formes de pollutions sous une seule variable). Pour plus d'explication si le sujet vous intéresse vous pouvez aller voir une série de deux vidéos traitant du sujet :

— Croissance et PIB pour les nuls.
— Croissance et PIB, les limites.

Elles sont faites conjointement par deux vidéastes : Heu'reka et Le Réveilleur. Le premier a une chaîne traitant d'économie et de finance ; le second traite de problématiques environnementales telles que la pollution, la gestion des ressources naturelles... Vous pouvez aussi lire cet article de Jean-Marc Jancovici, ingénieur, traitant lui aussi du sujet.

1. **Le PIB**
   Notre année de référence ou année zéro sera 1950, le PIB y était d'environ 5 000 milliards de dollars. En 2017, il est estimé à environ 80 000 milliards de dollars. On note p_n le PIB à l'année n ; on a donc $p_0 = 5000$ et $p_{67} = 80000$ (on garde comme unité le milliard de dollars par commodité). Afin de simplifier, on va supposer que chaque année, le PIB a augmenté d'un pourcentage fixe t entre 1950 et 2017.
   (a) Expliquer pourquoi on a pour tout entier naturel $n < 67$, $p_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times p_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Préciser sa raison et son terme initial puis donner son terme général.
   (c) Calculer le PIB en 2050 s'il continue d'évoluer de la même façon.
   (d) Calculer la somme des richesses produites entre 1950 et 2017.
2. **La pollution**
   On sait que la quantité de gaz à effet de serre émise en 2015 est d'environ 20 000 Mt (méga tonne) équivalent CO_2. On note g_n la quantité de CO_2 émise à l'année n ; on a donc $g_{67} = 20000$. Supposons que la croissance de la quantité de gaz à effet de serre soit deux plus petite que celle du PIB.
   (a) Expliquer pourquoi on a pour tout entier naturel $n < 67$, $g_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{200}\right) \times g_n$.
   (b) Quelle la nature de cette (g_n) ? Préciser sa raison et son terme initial puis donner son terme général.
   (c) Calculer la quantité de gaz à effet de serre émise en 1950 d'après ce modèle.
   (d) Calculer la quantité de gaz à effet de serre émise en 2050 s'il continue d'évoluer de la même façon.

(e) Calculer quantité de gaz à effet de serre émise entre 1950 et 2017.

Exercice 8.17. [$0,999\dots$,]** Dans un nombre à virgule, lorsque une séquence de chiffres $a_{-1}\dots a_{-k}$ se répètent à l'infini dans un nombre à virgule, on pourra le signifier par la notation $\overline{a_{-1}\dots a_{-k}}$. Par exemples :

$$0,\bar{3} = 0,333\dots = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 0,45\overline{123} = 0,45123123123\dots.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $0,\bar{9} = 0,999\dots = 1$.

1. Décomposer $0,\bar{9}$ en base 10. Que remarquez-vous ?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k}$.
3. En déduire que $0,\bar{9} = 1$.

Exercice 8.18. [$0,\overline{01}$,*]** Un nombre s'écrit $a_n\dots a_0, a_{-1}\dots a_{-m}$ en binaire s'il se décompose sous la forme :

$$a_n 2^n + \dots + a_0 2^0 + a_{-1}\frac{1}{2^1} + \dots a_{-m}\frac{1}{2^m}.$$

1. Donner la décomposition en base 2 du nombre binaire $0,\overline{01}$.
2. Exprimer $0,\overline{01}$ comme la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique.
3. En déduire l'écriture de $0,\overline{01}$ en base 10.

Exercice 8.19. [Épidémie,]** Lors de la phase exponentielle d'une épidémie, on estime que le nombre personnes atteintes de la maladie augmente de 10% chaque semaine. Toutefois, le système de santé peut soigner 2000 personnes par semaine. On note I_n le nombre de personnes infectés à la fin de la semaine n. On estime qu'il y a initialement 5000 personnes atteintes : $I_0 = 5000$.

1. Calculer le nombre d'infectés à la fin de des deux premières semaines.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On pose $u_n = I_n - 20000$. Montrer que (u_n) est géométrique de raison 1,1.
4. Exprimer u_n puis I_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que I_n est décroissante.
6. (**) Étudier les variations de I_n selon les trois cas suivants :

   (a) $I_0 < 20000$; (b) $I_0 = 20000$; (c) $I_0 > 20000$.

7. Résoudre l'équation $1,1x - 2000 = x$. Que constatez-vous ? Comment nommeriez-vous la valeur x ?

Exercice 8.20. [Tours de Hanoï,]** Les tours de Hanoï sont un jeu constitué de trois piquets de bois sur lesquels on empile des disques de bois de différentes tailles percés en leur centre, du plus large au plus petit. Le but du jeu est d'empiler les disques – toujours du plus large au plus petit – sur un des deux autres piquets. On a deux règles : on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois et on ne peut poser un disque que sur un autre disque plus grand ou un emplacement vide.
On appelle A, B et C les trois piquets et on note u_n le nombre minimal d'étapes nécessaires pour déplacer n disques.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit $n \geq 2$. On suppose que l'on a réussi à déplacer les $n-1$ disques (en u_{n-1} étapes donc) les plus petits du piquet A au piquet B. On déplace alors le plus grand des disques du piquet A vers le C tant et si bien qu'il ne reste plus qu'à déplacer à nouveau les $n-1$ plus petits disques sur le C. En déduire une expression de u_n en fonction de u_{n-1}.
3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_n + 1$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme à déterminer.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
   (c) En supposant qu'il faille cinq secondes pour déplacer un disque, combien de temps est nécessaire pour finir le jeu avec dix disques ?

8.4.3 Entraînement

Exercice 8.21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer u_0, u_1 et u_2 et donner leurs variations.

1. $u_0 = -2$ et $u_3 = 8$.
2. $u_{14} = -6$ et $u_{36} = -12$.
3. $u_{23} = 56$ et $u_{27} = 42$.

Exercice 8.22. Calculer la somme des 50 premiers termes des suites de l'exercice précédent.

Exercice 8.23. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer u_0, u_1 et u_2 et donner leurs variations.

1. $u_0 = -2$ et $u_3 = 8$.
2. $u_{14} = -6$ et $u_{36} = -12$.
3. $u_{23} = 56$ et $u_{27} = 42$.

Exercice 8.24. Calculer la somme des 50 premiers termes des suites de l'exercice précédent.

Exercice 8.25. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison 3.
   (b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 8.26. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n - 4$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

8.5 Étude

On emprunte un capital 150 000€ afin de réaliser un achat immobilier. Un organisme de crédit nous l'accorde à un taux d'intérêts annuels fixe de $1,5\%$. L'emprunt sera remboursé en 20 ans avec des mensualités fixes m. À la fin de chaque année, les intérêts sont calculés sur le capital restant à rembourser et ajoutés à ce capital.

Afin de simplifier, on raisonnera d'abord avec des annuités (ce que l'on rembourse chaque année) fixes $a = 12m$. La première annuité intervient un an après la contraction du prêt. On note u_0 le capital emprunté et u_n le capital restant dû après le versement de la n-ème annuité.

1. **Modélisation**
   (a) Expliquer pourquoi $u_1 = u_0 \times 1,015 - a$.
   (b) Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel $n < 19$, $u_{n+1} = u_n \times 1,015 - a$.
   (c) Expliquer pourquoi $u_{20} = 0$.
2. **Étude de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) On pose $v_n = u_n - \dfrac{a}{0,015}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 1,015 et exprimer v_n en fonction de n, u_0 et a.
   (b) Montrer que
   $$u_n = 1,015^n u_0 + a\frac{1 - 1,015^n}{0,015}.$$
3. **Calcul des mensualités**
   (a) Montrer que
   $$a = \frac{u_0 \times 1,015^{20} \times 0,015}{1,015^{20} - 1}.$$
   (b) En déduire le montant des annuités puis des mensualités.
4. **Cas général** Écrire un algorithme donnant le montant des mensualités pour un capital emprunté quelconque, un taux d'intérêt annuel quelconque et un nombre d'années de remboursement quelconque.