Chapitre 3

Suites numériques

3.1 Généralités

Définition 3.1. *On dit que la fonction u est une suite réelle si elle est définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de n par u se note u_n. On l'appelle* ***terme d'indice n de u****. La suite u est communément notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus brièvement (u_n).*

Exemples :

— On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$. On a alors :

$$\begin{array}{lllll} u_0 = 0^2 - 1 & u_1 = 1^2 - 1 & u_2 = 2^2 - 1 & \dots & u_{10} = 10^2 - 1 \\ u_0 = -1 & u_1 = 0 & u_2 = 3 & \dots & u_{10} = 99 \end{array}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière **explicite** car chaque terme peut être déterminé par la seule connaissance de n.

— Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = v_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{llll} v_1 = v_{0+1} & v_2 = v_{1+1} & v_3 = v_{2+1} & v_4 = v_{3+1} \\ v_1 = v_0^2 & v_2 = v_1^2 & v_3 = v_2^2 & v_4 = v_3^2 \\ v_1 = 2^2 & v_2 = 4^2 & v_3 = 16^2 & v_4 = 256^2 \\ v_1 = 4, & v_2 = 16, & v_3 = 256, & v_4 = 65536. \end{array}$$

Le calcul de v_{10} requiert de connaître la valeur de v_9. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie **par récurrence** car car chaque terme peut être déterminé à partir du terme précédent : v_n.

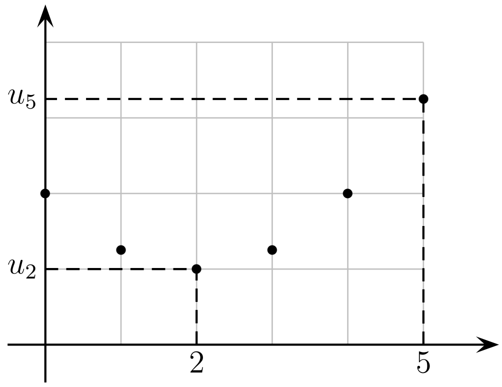
Remarque : Le premier terme de la suite u peut être u_1. Dans ce cas on notera alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Définition 3.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle représentation graphique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;u_n)$, où n parcourt les valeurs de $\mathbb{N}$.*

Exemple : On représente les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{4}n^2 - n + 2$$

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1,25	1	1,25	2	3,25



La figure représentée est un **nuage de points**. Ces points sont situés sur la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2.$$

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

3.2 Variations

Définition 3.3. *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si on a $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si on a $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si on a $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.*

Exemples :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + (-2)^n$. On a alors :

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1 \qquad u_2 = 2 \qquad u_3 = 1.$$

Ainsi $u_1 < u_2$ et $u_3 < u_2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas monotone.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{n}{2^n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} \\
v_{n+1} - v_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n}{2^{n+1}} \\
v_{n+1} - v_n &= \frac{1-n}{2^{n+1}} \\
v_{n+1} - v_n &\leq 0 \quad (\text{car } n \in \mathbb{N}^*) \\
v_{n+1} &\leq v_n.
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_{n+1} = w_n + 3n + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 3n + 1 \\ w_{n+1} - w_n &> 0 \text{ car } n \in \mathbb{N} \\ w_{n+1} &> w_n. \end{aligned}$$

   La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2 ; vidéo 3.

3.3 Comportement asymptotique

Définition 3.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un nombre réel k tel que :*

$$u_n \leq k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

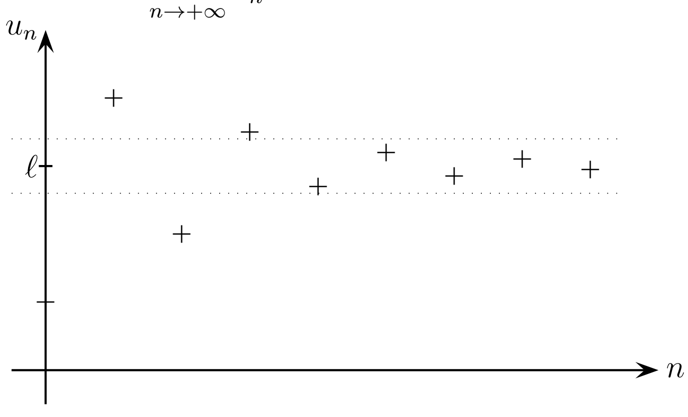
— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe un nombre réel k tel que :*

$$u_n \geq k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.*

Définition 3.5. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un nombre réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. On note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$



Remarques :

1. On rencontrera les formulations équivalentes :
   — la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ ;
   — u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On dit d'une suite non convergente qu'elle **diverge**.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{4n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On détermine quelques valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

n	0	1	2	...	12	13	...	68	69
u_n	0,5	1,66...	2,25	...	3,5	3,5625	...	3,9	3,901...

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 4 (résultat admis).

— L'intervalle ouvert $]3,5\,;4,5[$ contient 4, en vertu de la définition, il contient également toutes les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un rang donné. Ici, pour tout entier $n \geq 13$, on a : $3,5 < u_n < 4,5$.

— De même, l'intervalle ouvert $]3,9\,;4,1[$ contient 4. Pour tout entier $n \geq 69$, on a :

$$u_n \in \ ]3,9\,;4,1[.$$

Définition 3.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si pour tout nombre réel M fixé, il existe un rang à partir duquel tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs à M. On note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

— *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si pour tout nombre réel M fixé, il existe un rang à partir duquel tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont inférieurs à M. On note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

★ Vidéo.

3.4 Algorithme et programmation

Pour ce qui est de l'utilisation de calculatrice, on pourra se reporter aux tutoriels d'Yvan Monka que l'on trouvera dans cette playlist (TI et Casio).

3.4.1 Calcul de termes

Le calcul du terme d'une suite peut se modéliser par l'exécution d'un algorithme. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = u_n - n + 2 \ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Boucle conditionnelle

Le calcul d'un terme de la suite consiste à appliquer la formule de récurrence jusqu'à atteindre ce terme. Cela peut se décrire à l'aide d'une *boucle conditionnelle*.

Algorithme 1 : Calcul de terme

Données : $n \in \mathbb{N},\ u \in \mathbb{R}$

1 **Début**

2 $\quad n \longleftarrow 0$

3 $\quad u \longleftarrow 3$

4 $\quad$ **Tant que** $n < 6$ **:**

5 $\qquad u \longleftarrow u - n + 2$

6 $\qquad n \longleftarrow n + 1$

$\quad$ **Sorties :** u

Vocabulaire

— Les variables n et u sont ***déclarées*** aux lignes 3 et 4.

— Elles sont ***initialisées*** aux lignes 2 et 3.

— Le *corps de la boucle* désigne les instructions 5 et 6.

— Le corps de la boucle est exécuté tant que la condition de la ligne 4 est réalisée.

— Chaque exécution du corps s'appelle une ***itération***.

Représentation

L'exécution d'un algorithme consiste à indiquer ses états successifs, c'est-à-dire les valeurs prises par chacune de ses variables. Un moyen pratique consiste à les inscrire dans un tableau.

n	0	1	2	3	4	5	6
u	3	5	6	6	5	3	0

Une fois la condition de sortie réalisée, l'algorithme se poursuit à partir de l'instruction 12. La valeur affichée est 0, c'est la dernière valeur affectée à la variable u. Elle correspond ici à u_6.

Implémentation

Le programme ci-dessous (écrit en Python) exécute les mêmes instructions.

```
n=0
u=3
while n<6 :
    u=u-n+2
    n=n+1
print(u,n)
```

Dans le cas général, il faudra remplacer :

— les valeurs initiales de n et u selon la suite choisie ;

— la borne de n par le rang du terme dont on souhaite connaître la valeur ;

— la formule de récurrence.

Par ailleurs, le critère d'arrêt ne porte pas nécessairement sur n, on pourrait par exemple prendre $u < 10$ ou $u > 15$. Cependant, ces critères peuvent s'avérer dangereux ou inutiles, c'est le cas de ces deux-là. En effet, avec $u > 15$, l'algorithme ne démarre même pas car la condition de la boucle n'est pas satisfaite tandis qu'avec $u < 10$ la condition est toujours satisfaite tant et si bien que l'algorithme ne s'arrête jamais...

Boucle inconditionnelle

Le même calcul peut être décrit à partir d'une *boucle inconditionnelle*. C'est le cas lorsque le nombre d'itérations à connu à l'avance.

Algorithme 2 : Calcul d'un terme

Données : $u \in \mathbb{R}$
Début
    $u \longleftarrow 3$
    Pour *n variant de 0 à 5* **:**
        $u \longleftarrow u - n + 2$
    Sorties : u

On affecte 7 valeurs à la variable u et seulement 6 à n. On prêtera donc attention à adapter le tableau de valeurs.

u	3	5	6	6	5	3	0
n	0	1	2	3	4	5	

Remarques :

- Lorsque la formule de récurrence est exprimée en fonction de u, il est important de modifier la valeur de u avant celle de n.
- La boucle conditionnelle ne s'utilise que lorsque le nombre d'itérations est connu préalablement.

3.4.2 Problème de seuil

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Un *problème de seuil* consiste à rechercher un rang particulier vérifiant une certaine condition sur les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : Nous considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la partie précédente. Les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblent décroître de plus en plus rapidement à partir de $n = 3$. On se demande si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut atteindre une valeur aussi basse que souhaitée.

Étant donné que le nombre d'étapes requises est inconnu à l'avance, on utilise forcément une boucle conditionnelle. Dans le cas présent, nous recherchons le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq -750$.

Algorithme 3 : Recherche de seuil

Données : $n \in \mathbb{N},\ u \in \mathbb{R}$
Début
    $n \longleftarrow 0$
    $u \longleftarrow 3$
    Tant que $u > -750$ **:**
        $u \longleftarrow u - n + 2$
        $n \longleftarrow n + 1$
    Sorties : n

Si nous exécutions cet algorithme à la main, nous écririons :

n	0	1	2	...	40	41	42
u	3	5	6	...	-697	-735	-774

La valeur recherchée et affichée serait bien 42. En Python, cet algorithme s'écrit :

```
n=0
u=3
while u>-750 :
    u=u-n+2
    n=n+1
print(u,n)
```

3.5 Exercices

3.5.1 Démarrage

Exercice 3.1. Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les trois premiers termes

$$u_n = 3n - 4, \quad v_n = 2n^2 + 1, \quad w_n = \frac{n}{n+1}, \quad x_n = 2^n - 1.$$

Exercice 3.2. Pour chacune des suites définies par récurrence ci-dessous, calculer les trois premiers termes.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n + 4, \\ u_0 & = & 2. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & 2v_n^2 + 1, \\ v_0 & = & 0. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} w_{n+1} & = & \dfrac{w_n}{w_n + 1}, \\ w_0 & = & 1. \end{array}\right.$$

Exercice 3.3. Déterminer si les premières suites des deux exercices précédents sont monotones ou pas.

Exercice 3.4. Déterminer si les suites de l'exercice 3.1 sont majorées, minorées, bornées.

Exercice 3.5. Déterminer les limites des suites ci-dessous.

$$u_n = -5n + 2, \quad v_n = 4n^2 + n + 7, \quad w_n = \frac{2n+3}{n}, \quad x_n = (-1)^n.$$

Exercice 3.6. [Algorithme] Exécuter l'algorithme suivant et préciser la suite associée.

Algorithme 4 : Calcul de terme

Données : $n \in \mathbb{N}, \ u \in \mathbb{R}$

```
Début
    n ⟵ 0
    u ⟵ 5
    Tant que n < 4 :
        u ⟵ u + 2n − 1
        n ⟵ n + 1
    Sorties : u
```

Exercice 3.7. [Algorithme] Écrire et programmer en Python un algorithme calculant les 4 premiers termes des suites définies dans l'exercice 3.2.

Exercice 3.8. [Algorithme] Écrire et et programmer en Python un algorithme déterminant à partir de quel terme la suite définie par $u_n = 3n^2 - 50n + 1$ dépasse 1000.

3.5.2 Appronfondissement

Exercice 3.9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'observez-vous ? Conjecturer quant aux valeurs prises par la suite.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Si oui, la déterminer.

Exercice 3.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_6.
2. (u_n) est-elle bornée ?
3. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 3.11. [Démonstration] Montrer qu'une suite croissante – resp. décroissante – est minorée – resp. majorée.

Exercice 3.12. [Démonstration] On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes – resp. décroissantes – alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante – resp. décroissante.

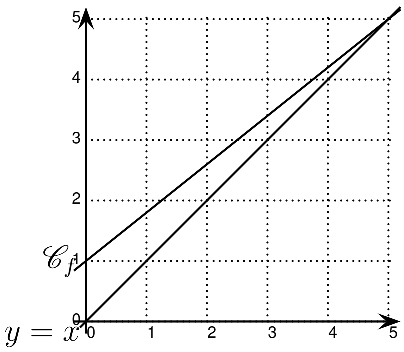
Exercice 3.13. Déterminer les variations, les éventuels minorants et majorants, la limite – si elle existe – des suites suivantes :

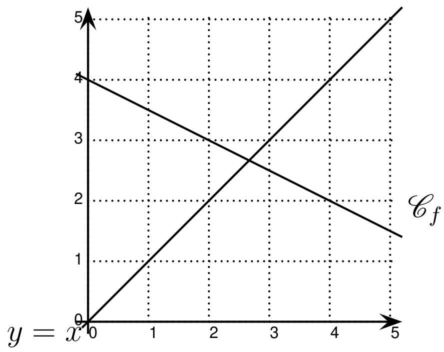
$$u_n = -n^2 - 2n, \quad v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1, \quad w_n = \frac{2n}{n+1}, \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n^3}, \quad y_n = 10 - (-2)^n.$$

Exercice 3.14. Déterminer les variations, les éventuels minorants et majorants des suites suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -7u_n^4 + u_n - 3, \\ u_0 &= 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 6n - 1, \\ u_0 &= 0. \end{cases}$$

Exercice 3.15. Construire les 5 premiers termes pour chacun des cas ci-dessous la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.





Exercice 3.16. [Algorithme] Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Calculer les termes de H_1 à H_3 sous forme de fraction.
2. Établir la relation de récurrence définissant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Écrire et programmer un algorithme en Python permettant de calculer le n-ième terme de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Quelles sont les variations de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. On admet que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $H_{n_0} \geq 3$.

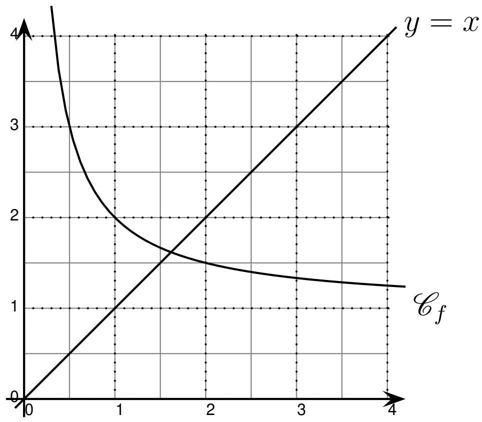
Exercice 3.17. [Algorithme] On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dite de Fibonacci par

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_0 &=& 1, \\ F_1 &=& 1, \\ F_{n+2} &=& F_{n+1} + F_n,\ n \geq 2. \end{array}\right.$$

1. En détaillant les calculs, déterminer F_5.
2. Écrire et programmer en Python un algorithme permettant de calculer le n-ième terme de (F_n). Vérifier que $F_{20} = 10946$.

Exercice 3.18. [Algorithme] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Construire sur le graphique ci-contre les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Déterminer le plus petit entier n_1 tel que $|u_{n_1} - \phi| < 10^{-4}$.
4. Déterminer le plus grand entier n_2 tel que $|u_{n_2} - \phi| > 10^{-7}$.



3.5.3 Entraînement

Exercice 3.19. Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les quatre premiers termes.

$$u_n = -n^2-4, \quad v_n = \sqrt{n+5}, \quad w_n = \frac{3n}{n+4}, \quad x_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n-2, \quad y_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right), \quad z_n = \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 3.20. Pour chacune des suites définies par récurrence ci-dessous, calculer les trois premiers termes

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& u_n - n + 3, \\ u_0 &=& 1. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} v_{n+1} &=& 7v_n^2 + v_n, \\ v_0 &=& 1. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} w_{n+1} &=& \dfrac{1}{w_n+2}, \\ w_0 &=& 0. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} &=& \sqrt{x_n}, \\ x_0 &=& 144. \end{array}\right.$$

Exercice 3.21. Déterminer si les suites l'exercice 3.19 sont monotones ou pas.

Exercice 3.22. Déterminer si les deux premières suites de l'exercice 3.20 sont monotones ou pas.

Exercice 3.23. Déterminer si les suites de l'exercice 3.19 sont majorées, minorées, bornées.

Algorithme 5 : Calcul de terme

Données : $n \in \mathbb{N},\ u \in \mathbb{R}$

Début

- $n \longleftarrow 0$
- $u \longleftarrow 3$
- **Tant que** $n < 4$ **:**
  - $u \longleftarrow -2u + n$
  - $n \longleftarrow n + 1$
- **Sorties :** u

Exercice 3.24. Déterminer les limites des suites ci-dessous.

$$u_n = 3n - 12, \quad v_n = -6n^2 + 19, \quad w_n = \frac{n+1}{n}, \quad x_n = (-3)^n, \quad y_n = \sqrt{n^3 + 9}.$$

Exercice 3.25. [Algorithme] Exécuter l'algorithme suivant et préciser la suite associée.

Exercice 3.26. [Algorithme] Écrire et programmer en Python un algorithme calculant les 4 premiers termes des suites définies dans l'exercice 3.20.

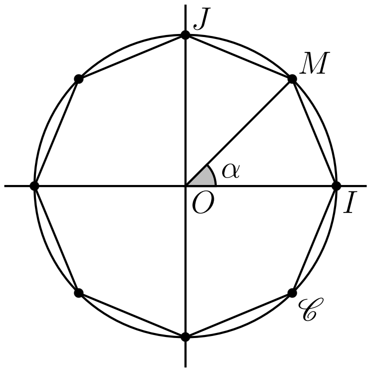
Exercice 3.27. [Algorithme] Écrire et et programmer en Python un algorithme déterminant à partir de quel terme la suite définie par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}}$ dépasse 1000.

3.6 Attendus et savoir-faire

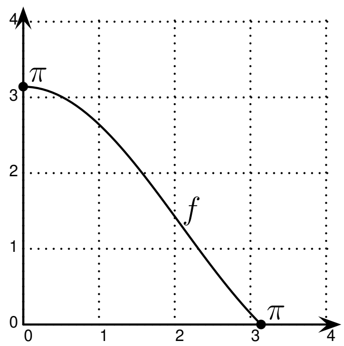
- Calculer les termes d'une suite connaissant sa définition explicite ou par récurrence et les placer sur repère.
- Déterminer les variations, la limite d'une suite ; savoir si elle est majorée, minorée.
- Comprendre, exécuter et écrire un algorithme de calcul de terme ou de recherche de seuil.

3.7 Étude

Soit un polygone à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique comme dans la figure ci-dessous ($n = 8$, il s'agit d'un octogone). On note $\mathcal{A}_n$ l'aire de ce polygone.



1. Dans le cas de l'octogone, quelle est la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{IOM}$?
2. Dans le cas général d'un polygone régulier à $n \geq 3$ côtés on pose $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$. Vérifier que pour $n = 8$ on retrouve bien le résultat de la question précédente. Expliquer pourquoi.
3. Quelles sont les figures obtenues lorsque $n = 3$ et $n = 4$?
4. Montrer que la suite (α_n) est bornée et décroissante. Déterminer sa limite.
5. Montrer que $\mathcal{A}_n = \pi \dfrac{\sin(\alpha_n)}{\alpha_n}$.
6. On pose sur $[0\,;\pi]$ la fonction f définie par $f(x) = \pi \dfrac{\sin(x)}{x}$. Quel est le lien entre $\mathcal{A}_n$ et f ?



7. À l'aide de la courbe de f ci dessus, dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\pi]$.
8. Donner un encadrement de f sur $[0\,;\pi]$.
9. (*) En déduire $(\mathcal{A}_n)$ est bornée.
10. (**) Montrer que $(\mathcal{A}_n)$ est croissante. *Indication :* on pourra utiliser la définition d'une suite décroissante avec (α_n) puis la définition d'une fonction décroissante avec f.
11. (**) Quelle est la limite de $(\mathcal{A}_n)$? En déduire une conjecture géométrique sur l'aire du polygone inscrit.