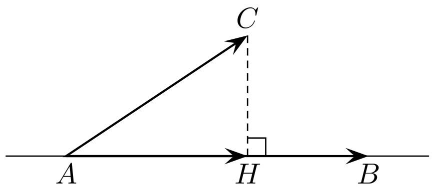
Chapitre 7

Produit scalaire dans le plan

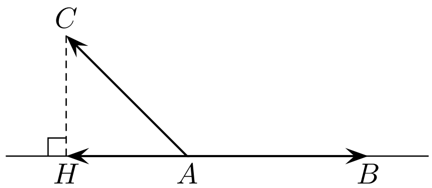
7.1 Définition

Définition 7.1. *Soient* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan. On appelle* ***produit scalaire*** *de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *le nombre noté* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *et défini ci-dessous :*

1. *Si* $\vec{u} = \vec{0}$, *alors* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. *Sinon, soient* A, B, C *trois points du plan tels que* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. *On appelle* H *le projeté orthogonal de* C *sur* (AB).
   - (a) *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont de même sens, alors* $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$.
   - (b) *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont de sens contraire, alors* $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$

Remarques :

— La droite (OA) existe car $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

— Le produit scalaire est aussi noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

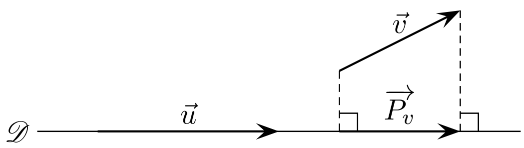
— On ne peut pas prendre les projetés de B et C sur une droite tierce. On doit soit projeter B sur (AC), soit C sur (AB).

★ Vidéo.

7.2 Autres Caractérisations

Propriété 7.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan avec $\vec{u} \neq \vec{0}$. Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan dirigée par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{P_v}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\mathscr{D}$. Alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{P_v}.$$

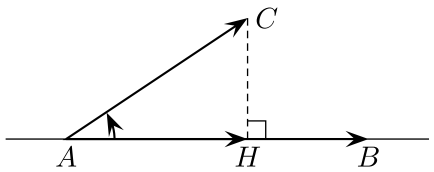


Propriété 7.2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}\,;\vec{v})).$$

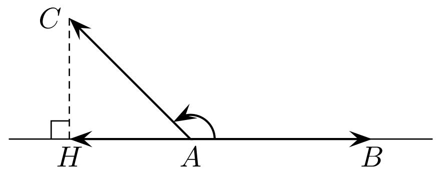
Démonstration. On reprend la configuration de la définition.

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= AB \times AH \\ &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}\,;\vec{v}))\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire :



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= -AB \times AH \\ &= AB \times AC \times (-\cos(\widehat{HAC})) \\ &= AB \times AC \times \cos(\pi - \widehat{HAC}) \\ &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}\,;\vec{v})).\end{aligned}$$

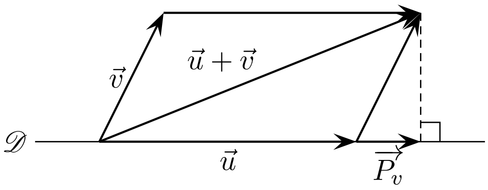
□

★ Vidéo.

Propriété 7.3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :*

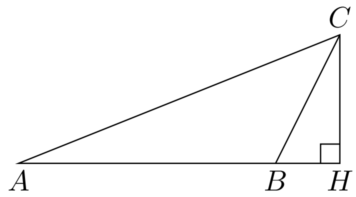
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Démonstration. Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors l'égalité désirée est immédiatement vérifiée. Sinon, on appelle $\mathscr{D}$ une droite dirigée par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{P_v}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\mathscr{D}$. Par commodité, on représente le cas où $\overrightarrow{P_v}$ est de même sens que $\vec{u}$.



Soient A, B, C et H des points du plan tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \qquad \vec{P_v} = \overrightarrow{BH}.$$



Alors :

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= AC^2 \\
&= AH^2 + HC^2 \\
&= (AB + BH)^2 + HC^2 \\
&= [AB + BC\cos(\widehat{HBC})]^2 + [BC\sin(\widehat{HBC})]^2 \\
&= [\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\cos((\vec{u}\,;\vec{v})]^2 + [\|\vec{v}\|\sin((\vec{u}\,;\vec{v}))]^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos((\vec{u}\,;\vec{v})) + \|\vec{v}\|^2\cos((\vec{u}\,;\vec{v}))^2 + \|\vec{v}\|^2\sin((\vec{u}\,;\vec{v}))^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\,[\cos((\vec{u}\,;\vec{v}))^2 + \sin((\vec{u}\,;\vec{v}))^2] \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.
\end{aligned}$$

On déduit de cette dernière égalité la formule désirée. □

★ Vidéo.

Propriété 7.4. *On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient les vecteurs du plan* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$*. Alors :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration. On a :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad [\vec{u}+\vec{v}]\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}.$$

Par application de la propriété précédente

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}[(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)] \\
&= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') \\
&= xx' + yy'.
\end{aligned}$$

□

★ Vidéo.

7.3 Propriétés algébriques

Propriété 7.5. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

*On dit que le produit scalaire est **commutatif**, ou **symétrique**.*

Démonstration. Exercice (utiliser la propriété précédente). □

Propriété 7.6. *Soient k un nombre réel et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan.*

1. $k\vec{u} \cdot \vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot k\vec{v}$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;

Démonstration. Idem propriété précédente. □

7.4 Interprétation géométrique

Propriété 7.7. *Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Alors : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.*

Démonstration. Exercice. □

Propriété 7.8. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

Démonstration. Exercice. □

★ Vidéo.

7.5 Attendus et savoir-faire

— Connaître et utiliser les différentes caractérisations / propriétés du produit scalaire.
— Faire le lien entre produit scalaire et orthogonalité.

7.6 Exercices

7.6.1 Démarrage

Exercice 7.1. Soit $ABCD$ un rectangle de longueur 2 et largueur 1. On note E, F, G et H les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$; O le milieu des diagonales du rectangle. Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.
5. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$.
6. $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH}$.
7. $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OD}$.
8. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OF}$.
9. $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Exercice 7.2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.
2. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{-\pi}{6}$.
3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{2}$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{-\pi}{2}$.
4. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{6}$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \pi$.

Exercice 7.3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.
2. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 2$.

Exercice 7.4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.5. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -3$, $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$, $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{w}\| = 3$. Calculer les produits scalaires ci-dessous.

1. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$.
2. $(-2\vec{u})\cdot\vec{w}$.
3. $(\vec{u}-3\vec{v})\cdot(2\vec{w})$.
4. $(-4\vec{u}+5\vec{v})\cdot(-2\vec{v}+3\vec{w})$.
5. $\left(\dfrac{1}{3}\vec{u}+5\vec{v}\right)\cdot(\vec{u}-\dfrac{1}{2}\vec{w})$.
6. $(2\vec{u}+5\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+6\vec{w})$.

Exercice 7.6. Donner deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7.6.2 Approfondissement

Exercice 7.7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer $\|\vec{u}\|$.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Exercice 7.8. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas déterminer toutes les mesures possibles de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\sqrt{3}$.
2. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$.
3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
4. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{6}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 7.9. [*] Est-il possible d'avoir un produit scalaire de deux vecteurs de signe différent de celui de leur cosinus ?

Exercice 7.10. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

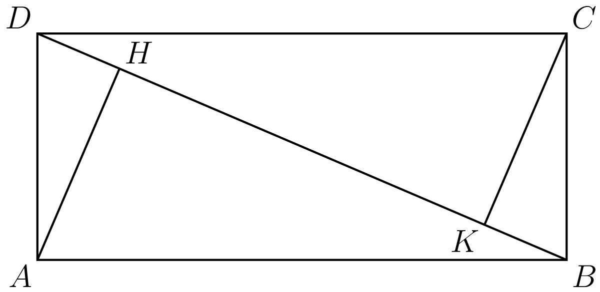
1. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 10$.
2. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$.

Exercice 7.11. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{13}$.
2. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{13+6\sqrt{2}}$.

Exercice 7.12. [Balistique,]** Un trébuchet lance un premier rocher à 400m puis effectue une rotation de 30 degrés avant d'en lancer un second à 500. Quelle est la distance entre les deux rochers ?

Exercice 7.13. On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 7$ et $AD = 3$. Les points H et K sont les projetés orthogonaux respectivement des points A et C sur la diagonale (BD).



1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ en fonction de HK en utilisant la projection.
2. En utilisant $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, calculer autrement ce même produit scalaire.
3. En déduire la valeur exacte de la longueur HK.

Exercice 7.14. Soient $A\,(2\,;1)$, $B\,(4\,;4)$ et $C\,(0\,;4)$ trois points du plan.

1. Montrer que ABC est isocèle en A.
2. Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.
3. En déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.

Exercice 7.15. Soient $A\,(2\,;2)$, $B\,(4\,;2)$ et $C\left(3\,;2+\sqrt{3}\right)$ trois points du plan.

1. Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 7.16. [**] Soient ABC un triangle équilatéral de côté a et $x \in \,]0\,;1[$. M, N et P sont trois points tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA}.$$

1. Faire une figure représentant la situation.
2. Calculer AM, AP, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP}$ puis MP.
3. En déduire la nature du triangle MNP.

Exercice 7.17. Soient ABC un triangle, I milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A.

1. Montrer que $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI}$. *Indication :* on pourra utiliser en justifiant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
2. En déduire que $AC^2 - AB^2 = -2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$.
3. Calculer IH pour $AC = 4$, $AB = 3$ et $BC = 6$.

Exercice 7.18. [**] Soit ABC un triangle équilatéral et E et F deux points du plan tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.
Indication : on pourra utiliser la relation $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$.

Exercice 7.19. Dans chaque cas, déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} m-4 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2m \\ 3-m \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2-m \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.20. [**] Soient O, A et B trois points du plan.

1. Construire A' le projeté orthogonal de A sur $[OB]$ et A' le projeté orthogonal de B sur $[OA]$.
2. Montrer que l'on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Exercice 7.21. [***] Démontrer le théorème de Pythagore.

7.6.3 Entraînement

Exercice 7.22. Soit $ABCD$ un rectangle de longueur 2 et largeur 1. On note E, F, G et H les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$; I le milieu des diagonales du rectangle. Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO}$.
3. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA}$.
5. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DO}$.
6. $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OG}$.
7. $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OA}$.
8. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE}$.
9. $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{FB}$.

Exercice 7.23. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas déterminer toutes les mesures possibles de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\| = 12$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
2. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$.
3. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
4. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = \frac{1}{6}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 7.24. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.
2. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 1$.

Exercice 7.25. Dans chaque cas, déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

1. $A\,(1\,;2)$, $B\,(3\,;2)$ et $C\left(\sqrt{3}+1\,;3\right)$.
2. $A\,(-1\,;1)$, $B\,(-1\,;5)$ et $C\left(-\sqrt{2}-1\,;-\sqrt{2}+1\right)$.

Exercice 7.26. Dans chaque cas, déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} m-1 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} m+1 \\ m \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 3-m \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -m \end{pmatrix}$.