Chapitre 12

Fonctions Trigonométriques

12.1 Définitions et propriétés

Définition 12.1.

— *La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe* $\cos(x)$.

— *La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe* $\sin(x)$.

Propriété 12.1.

— *La fonction cosinus est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\cos(-x) = \cos(x)$.

— *La fonction sinus est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Propriété 12.2. *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Démonstration. Les points d'affixes x et $x + 2\pi$ ayant les mêmes images sur le cercle trigonométrique par enroulement de la droite réelle autour du cercle – de périmètre 2π – on obtient le résultat. □

Propriété 12.3. *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$.

Fonction $f : x \mapsto$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
Dérivée $f' : x \mapsto$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

Propriété 12.4. *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

— *La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I de dérivée* $-u'\sin(u)$.

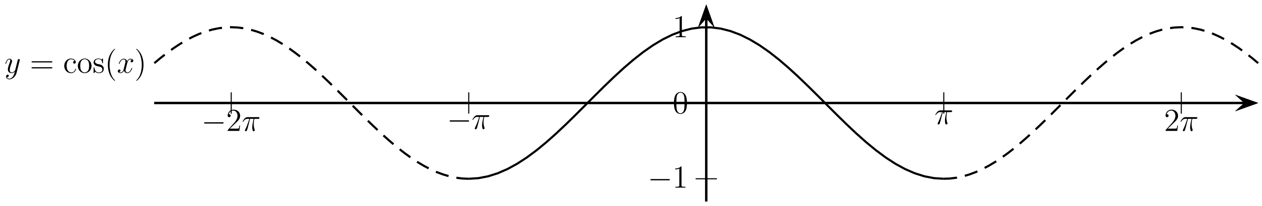
— *La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I de dérivée* $u'\cos(u)$.

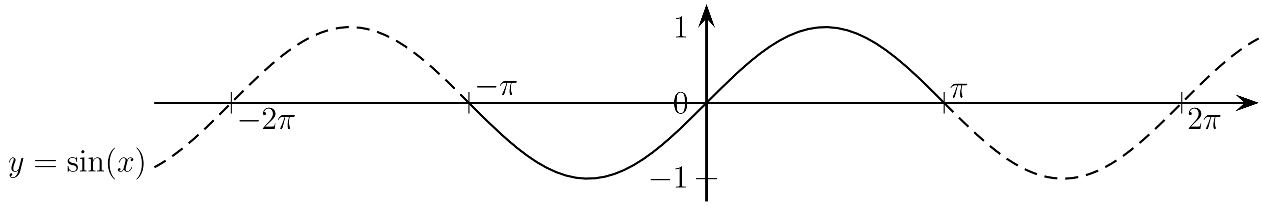
Exemples :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x + 4)$. f est de la forme $\sin(u)$ avec $u(x) = 3x + 4$ et donc $u'(x) = 3$. On a donc
$$f'(x) = u'(x)\cos(u(x)) = 3\cos(3x + 4).$$
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(5x^2 - x)$. f est de la forme $\cos(u)$ avec $u(x) = 5x^2 - x$ et donc $u'(x) = 10x - 1$. On a donc
$$f'(x) = -u'(x)\sin(u(x)) = -(10x - 1)\sin(5x^2 - x) = (1 - 10x)\sin(5x^2 - x).$$

12.2 Représentation graphique

Définition 12.2. *Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des **sinusoïdes**.*



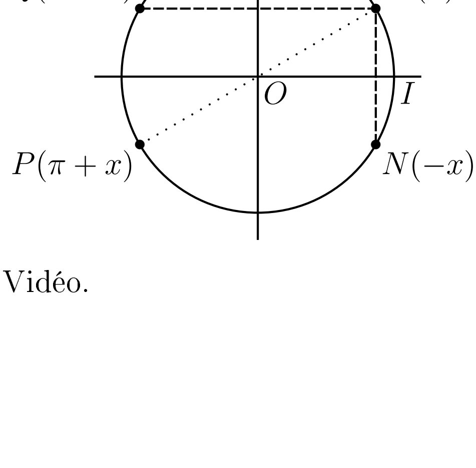


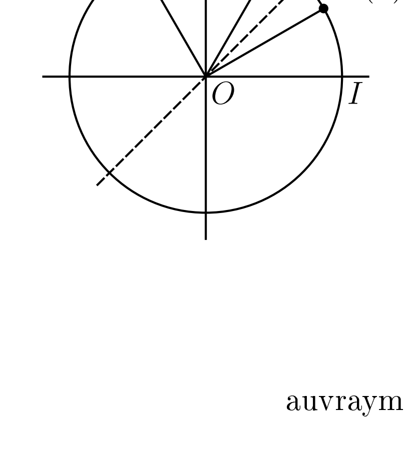
Remarques : on observe sur les deux graphes ci-dessus :
- la périodicité des fonctions sinus et cosinus avec le même schéma de courbe courbe qui se répète tout les intervalles de longueurs 2π (traits pleins et pointillés) ;
- la parité du cosinus, sa courbe représentative a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées ;
- l'imparité du sinus, sa courbe représentative a pour centre de symétrie l'origine du repère.

12.3 Formulaire de trigonométrie

12.3.1 Angles remarquables

Propriété 12.5. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*
1. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ *et* $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ *;*
2. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ *et* $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ *;*
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ *;*
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.





★ Vidéo.

12.3.2 Formules d'addition

Propriété 12.6. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Corollaire 12.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$;
2. $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(x)$;
3. $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$;
4. $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(x)$.

Exemple : On souhaite calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Or $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc, d'après le *1.* ci-dessus,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

De même, d'après le *4.* ci-dessus,

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

★ Vidéo.

12.3.3 Formules de duplication

Propriété 12.7. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
2. $\sin(2a) = 2\sin(a) \times \cos(a)$.

Exemple : On souhaite résoudre dan $[0\,;2\pi]$ l'équation trigonométrique

$$\cos(2x) = \sin(x).$$

On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc l'équation ci-dessus est équivalente à

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0.$$

Posons $X = \sin(x)$, on doit alors résoudre

$$2X^2 + X - 1 = 0.$$

On a $\Delta = 9$ donc deux racines : $X_1 = -1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$.
On a donc deux possibilités :

$$\sin(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc $x \in \left\{\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

12.4 Savoirs-faire et attendus

— Connaître les propriétés de périodicité et de parité du cosinus et du sinus.

— Utiliser le cercle trigonométrique pour retrouver les formules liant cosinus et sinus ;

— Utiliser ces formules.

12.5 Exercices

12.5.1 Démarrage

Exercice 12.1. Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou ni l'un ni l'autre ?

1. $f_1(x) = \sin(3x)$.
2. $f_2(x) = -2\cos(x)$.
3. $f_3(x) = 7x\sin(4x)$.
4. $f_4(x) = 3\cos(x) + 1$.

Exercice 12.2. Montrer que les fonctions suivantes sont 2π-périodiques.

1. $f_1(x) = \sin(x) + 1$.
2. $f_2(x) = -2\cos(x) + 1$.
3. $f_3(x) = \sin^2(x) + 1$.
4. $f_4(x) = \cos^2(x) + 2\sin(x) + 1$.

Exercice 12.3. Dériver les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 3\cos(x) + 1$.
2. $f_2(x) = -2\sin(x) + x$.
3. $f_3(x) = -4\cos(5x + 1) + x^2$.
4. $f_4(x) = \sin(x^2) + 1$.
5. $f_5(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.
6. $f_6(x) = \cos(x^3 + x) - \sin(x^2 + 1)$.

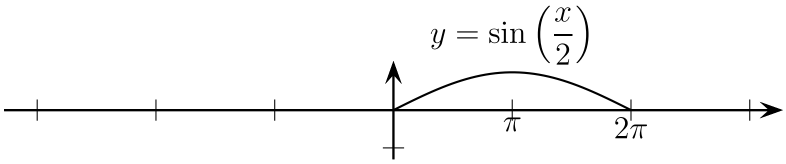
Exercice 12.4. À l'aide des formules de duplication, résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\sin(2x) = \sin(x)$.
2. $\sin(2x) = \cos(x)$.

12.5.2 Approfondissement

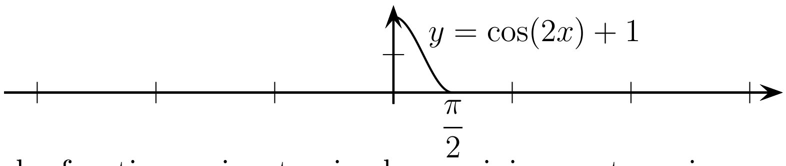
Exercice 12.5. Le graphe ci-dessous représente sur $[0\,;2\pi]$ la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est 4π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Exercice 12.6. Le graphe ci-dessous représente sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction f définie par $f(x) = \cos(2x) + 1$.

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Exercice 12.7. Donner des encadrements des fonctions suivantes, i.e. leurs minimum et maximum s'ils existent (sans se soucier de leur domaine de définition).

1. $f_1(x) = 2\cos(x) + 1$.
2. $f_2(x) = -3\sin^2(x) + 5$.
3. $f_3(x) = \cos(\mathrm{e}^x)$.
4. $f_4(x) = \sin\left(\dfrac{\mathrm{e}^x\sqrt{x}}{\cos(x)}\right)$.
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2(x)}$.

Exercice 12.8. Dériver les fonctions suivantes, on précisera leurs domaines de définitions et de dérivabilité.

1. $f_1(x) = x\cos(x)$.
2. $f_2(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
3. $f_3(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x) + 1$.
4. $f_4(x) = \sin^2(x) - 2\sin(x) + 1$.
5. $f_5(x) = \sin(x)\cos(x)$.
6. $f_6(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
7. $f_7(x) = \mathrm{e}^x\cos(x)$.
8. $f_8(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$.
9. $f_9(x) = \dfrac{\cos(x^2+1)}{\sin^2(x)+1}$.
10. $f_{10}(x) = \cos(\mathrm{e}^{\sin(x)})$.

Exercice 12.9. À l'aide des formules de duplication, résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\sin(2x) = \sqrt{3}\sin(x)$.
2. $\sin(2x) = -\sqrt{2}\cos(x)$.

Exercice 12.10. On cherche à résoudre l'équation trigonométrique

$$(E) \qquad \cos(2x) = (\sqrt{2} - 2)\cos(x) + \sqrt{2} - 1.$$

1. Montrer que résoudre cette équation est équivalent à résoudre

$$2\cos^2(x) + (2 - \sqrt{2})\cos(x) - \sqrt{2} = 0.$$

2. On pose $X = \cos(x)$.
   (a) Montrer que $6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2$.
   (b) En déduire les racines du polynôme $2X^2 + (2 - \sqrt{2})X - \sqrt{2}$.
   (c) En déduire les solutions de (E).

Exercice 12.11. On cherche à résoudre l'équation trigonométrique

$$(E) \qquad \cos(2x) = (\sqrt{3} - 2)\sin(x) - \sqrt{3} + 1.$$

1. Montrer que résoudre cette équation est équivalent à résoudre

$$-2\sin^2(x) + (2 - \sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0.$$

2. On pose $X = \sin(x)$.
   (a) Montrer que $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$.
   (b) En déduire les racines du polynôme $-2X^2 + (2 - \sqrt{3})X + \sqrt{3}$.
   (c) En déduire les solutions de (E).

Exercice 12.12. [Physique,]** Lors de l'étude des oscillateurs harmoniques d'ordre 2, par exemple une masse suspendue à un ressort, on cherche des fonctions f vérifiant (E) ; $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ (f'' est la dérivé seconde f i.e. la dérivée de sa dérivée).

1. Soit a_1 un réel, montrer que $f_1 : t \mapsto \cos(\omega t + a_1)$ vérifie (E) puis déterminer une valeur de a_1 telle que $f_1(0) = 0$.
2. Soit a_2 un réel, montrer que $f_2 : t \mapsto \sin(\omega t + a_2)$ vérifie (E) puis déterminer une valeur de a_2 telle que $f_2(0) = \dfrac{1}{2}$.

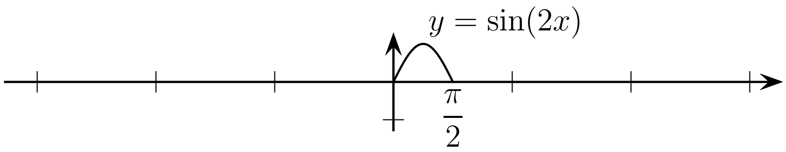
Exercice 12.13. [Physique,]** On considère une masse m suspendue à un ressort (c'est donc un oscillateur harmonique d'après l'exercice précédent). On note y la hauteur relative de la masse ; $y = 0$ correspondant à l'équilibre lorsque la masse est immobile.
On amène la masse à une hauteur de 10 puis on la lâche. On suppose qu'il n'y a pas d'amortisseur des oscillations, ces dernières étant données par $y(t) = 10\cos(3t)$; on remarque que $y(0) = 10$.

1. Pour quel temps t_1 la masse passe pour la première fois par sa position d'équilibre $y = 0$?
2. Pour quel temps t_2 la masse passe pour la deuxième fois par sa position d'équilibre ?
3. Quelle est la période des oscillations de la masse ?
4. Quelle seront les hauteurs maximale et minimale de la masse ?
5. (**) Quelle est l'équation de la forme de (E) de l'exercice précédent vérifiée par y ?

12.5.3 Entraînement

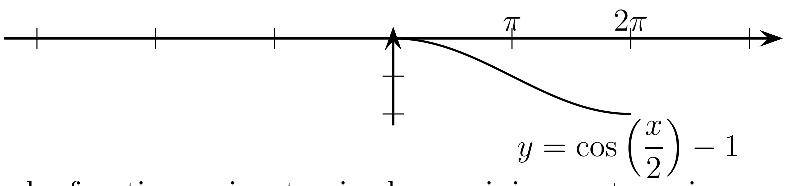
Exercice 12.14. Le graphe ci-dessous représente sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction f définie par $f(x) = \sin(2x)$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Exercice 12.15. Le graphe ci-dessous représente sur $[0\,;2\pi]$ la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f est 4π-périodique.
3. Compléter le graphe de f ci-contre.



Exercice 12.16. Donner des encadrements des fonctions suivantes, i.e. leurs minimum et maximum s'ils existent (sans se soucier de leur domaine de définition).

1. $f_1(x) = 1 - 2\sin(x)$.
2. $f_2(x) = 4\cos^2(x) - 3$.
3. $f_3(x) = \sin(\sqrt{e^x})$.
4. $f_4(x) = \cos\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.
5. $f_5(x) = \dfrac{-2}{1 + \sin^2(x)}$.

Exercice 12.17. Dériver les fonctions suivantes, on précisera leurs domaines de définitions et de dérivabilité.

1. $f_1(x) = (x^2 + 1)\sin(x)$.
2. $f_2(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^3}$.
3. $f_3(x) = x^2\sin(x) + x\cos^2(x)$.
4. $f_4(x) = \sin(3x^2 - 4x + 1)$.
5. $f_5(x) = \sin(2x + 1)\cos(2x - 1)$.
6. $f_6(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
7. $f_7(x) = \sqrt{x}\cos(x)$.
8. $f_8(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
9. $f_9(x) = \dfrac{\cos^2(x) + 1}{\sin(x^2 + 1)}$.
10. $f_{10}(x) = \sin(e^{\cos(x)})$.

Exercice 12.18. À l'aide des formules de duplication, résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\sin(2x) = -\sqrt{3}\cos(x)$.
2. $\sin(2x) = \sqrt{2}\sin(x)$.

Exercice 12.19. On cherche à résoudre l'équation trigonométrique

$$(E) \qquad \cos(2x) = (\sqrt{3}-1)\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

1. Montrer que résoudre cette équation est équivalent à résoudre

$$2\cos^2(x) + (1-\sqrt{3})\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

2. On pose $X = \cos(x)$.
   (a) Montrer que $4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$.
   (b) En déduire les racines du polynôme $2X^2 + (1-\sqrt{3})X - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (c) En déduire les solutions de (E).

Exercice 12.20. On cherche à résoudre l'équation trigonométrique

$$(E) \qquad \cos(2x) = (\sqrt{2}-2)\sin(x) + 1 - \sqrt{2}.$$

1. Montrer que résoudre cette équation est équivalent à résoudre

$$-2\sin^2(x) + (2-\sqrt{2})\sin(x) + \sqrt{2} = 0.$$

2. On pose $X = \sin(x)$.
   (a) Montrer que $6 + 4\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})^2$.
   (b) En déduire les racines du polynôme $-2X^2 + (2-\sqrt{2})X + \sqrt{2}$.
   (c) En déduire les solutions de (E).