

Chapitre 10

Exponentielle

10.1 Définition

Théorème 10.1. *Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

Démonstration. Admis. □

Définition 10.1. *On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note \exp .*

Remarque : On a donc $\exp(0) = 1$.

10.2 Propriétés

10.2.1 Propriétés fonctionnelles

Propriété 10.1. *La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est sa propre dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.*

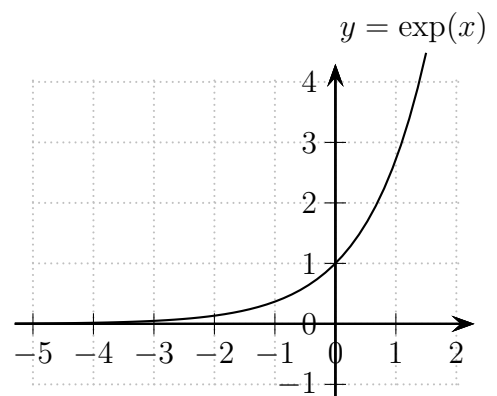
Démonstration. Conséquence de sa définition. □

Propriété 10.2. *La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$.*

Démonstration. Admis. □

Propriété 10.3. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .*

Démonstration. L'exponentielle étant sa propre dérivée et strictement positive, on en déduit que sa dérivée est strictement positive et donc qu'elle est strictement croissante. □



10.2.2 Relations fonctionnelles

Propriété 10.4. Pour tous réels x et y , on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Remarque : L'exponentielle transforme la somme en produit.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme l'exponentielle ne s'annule pas, la fonction $f(x) = \frac{\exp(x + y)}{\exp(x)}$ est bien définie sur \mathbb{R} . Elle est par ailleurs dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\exp'(x + y) \exp(x) - \exp'(x) \exp(x + y)}{[\exp(x)]^2} \\ &= \frac{\exp(x + y) \exp(x) - \exp(x) \exp(x + y)}{[\exp(x)]^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = \exp(y)$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(y) = \frac{\exp(x + y)}{\exp(x)},$$

donc $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$. □

Corollaire 10.1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$1. \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad 2. \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}. \quad 3. \exp(nx) = [\exp(x)]^n.$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. En prenant $y = -x$ dans le théorème précédent, on obtient

$$\exp(x - x) = \exp(x) \times \exp(-x) \iff 1 = \exp(x) \times \exp(-x) \iff \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

2. D'après le théorème précédent le point 1, on a

$$\exp(x - y) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

3. Admise. □

10.2.3 Le nombre e

Définition 10.2. Le nombre $\exp(1)$ est noté e : $\exp(1) = e$.

Propriété 10.5. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

Démonstration. Admise. □

Remarque : En effet, on a $\exp(x) = \exp(1 \times x) = [\exp(1)]^x$ comme expression généralisant le point 3 du corollaire 10.1.

Propriété 10.6. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
2. $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$.
3. $e^{x+y} = e^x \times e^y$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $e^{nx} = [e^x]^n$.

Remarque : On retrouve les propriétés des fonctions puissance.

★ Vidéo.

10.3 Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété 10.7. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $e^x = e^y \iff x = y$.
2. $e^x < e^y \iff x < y$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du fait que la fonction exponentielle soit strictement croissante sur \mathbb{R} . □

Exemples :

1. On souhaite résoudre l'équation $e^{4x+1} = e^3$. D'après le point 1 de la propriété précédente, cela revient à résoudre l'équation $4x + 1 = 3$. On en déduit que la solution est $x = \frac{1}{2}$.
2. On souhaite résoudre l'inéquation $e^{x^2+1} \leq e^{-2}$. D'après le point 2 de la propriété précédente, cela revient à résoudre l'inéquation $x^2 + 1 \leq -2$. On en déduit qu'il n'y pas de solutions.

★ Vidéo (équation) ; vidéo (inéquation).

10.4 Fonction composée de la forme e^u avec u fonction

Propriété 10.8. Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction e^u est définie et dérivable sur I de dérivée $(e^u)' = u' \times e^u$.

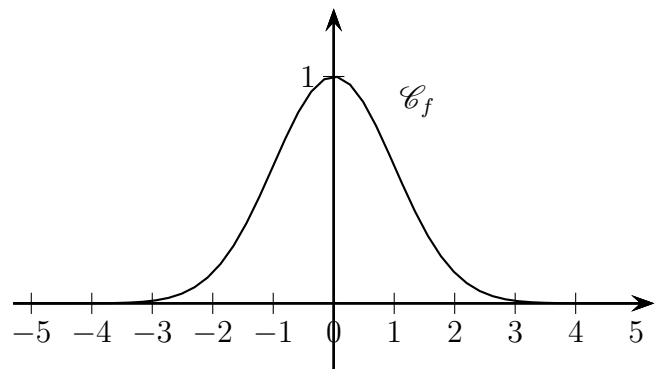
Démonstration. Admise. □

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Elle est de la forme e^u avec $u(x) = -\frac{x^2}{2}$. u est clairement définie et dérivable sur \mathbb{R} donc, d'après la proposition ci-dessus, e^u aussi et on a

$$f'(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' \times e^{-\frac{x^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

L'exponentielle étant strictement positive, on en déduit que f' est du signe de $-x$ puis les variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{-\frac{x^2}{2}}$	+		+
$-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
f	0	1	0



Remarque : La fonction f ci-dessus est de la famille des gaussiennes reconnaissables par leurs courbes en forme de cloche. Elles sont très présentes en mathématiques – notamment dans les probabilités avec les lois normales –, apparaissant dans la résolution de nombreux problèmes issus de la physique, la chimie, la biologie, l'écologie, l'économie...

★ Vidéo.

10.5 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser les propriétés de l'exponentielle.
- Résoudre des équations et inéquations avec des exponentielles.
- Étudier des fonctions composées avec des exponentielles.

10.6 Exercices

10.6.1 Démarrage

Exercice 10.1. Écrire les nombres suivants sous la forme $\exp(n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

- $\exp(3) \times [\exp(4)]^2$.
- $\exp(-10) \times \exp(6)$.
- $[\exp(5)]^{-3}$.
- $\frac{1}{[\exp(12)]^{-4}}$.
- $\frac{\exp(2) \times [\exp(-6)]^2}{\exp(3)}$.

Exercice 10.2. Simplifier les expressions suivantes.

- $e^6 \times e^{-3} \times e^4$.
- $e^{-3} \times (e^2)^8 \times e^{-1}$.
- $(e^{5x} \times e^{2x})^4 \times e^{4x}$.
- $\frac{e^6}{e^2}$.
- $\frac{(e^3)^2}{e^{-2}}$.
- $\frac{e^{-2x} \times (e^3)^4}{e^{2x}}$.

Exercice 10.3. Dériver les fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} .

1. $f(x) = e^x + 3$.
2. $g(x) = 3e^x$.
3. $h(x) = \frac{e^x}{3}$.

Exercice 10.4. Déterminer le signe des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} .

1. $f(x) = e^x + 3$.
2. $g(x) = 3e^{-5x}$.
3. $h(x) = -\frac{2}{e^{-x^2}}$.

Exercice 10.5. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $e^x = e^{-2}$.
2. $e^x + 4 = 0$.
3. $e^{3x+3} = e$.
4. $4e^{-2x} = 4$.
5. $e^x \leq e^{-1}$.
6. $e^x + 1 \geq 0$.
7. $e^{3x-4} > e$.
8. $-2e^{x+8} < 6$.
9. $e^{x^2-3x-1} = 1$.

Exercice 10.6. Étudier les variations des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{7x}$.
2. $g(x) = -3e^{4x-2}$.
3. $h(x) = e^{x^2-2}$.

10.6.2 Approfondissement

Exercice 10.7. Simplifier les expressions suivantes.

1. $u_n = e^{2n+1} \times e^{3n-4}$.
2. $v_n = (e^{2n-1})^2 \times e^{3n+4}$.
3. $w_n = \frac{e^{5n-3}}{e^{-2n+1}}$.

Exercice 10.8. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = (e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2$.
2. $B(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

Exercice 10.9. Démontrer les égalités suivantes pour tout réel x .

1. $\frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$.
2. $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$.

Exercice 10.10. Donner les ensembles de définitions et dérivations des fonctions suivantes puis les dériver.

1. $f_1(x) = \sqrt{x} - e^x$.
2. $f_2(x) = xe^x$.
3. $f_3(x) = (x^2 - 3x + 5)e^x$.
4. $f_4(x) = e^x \sqrt{x}$.
5. $f_5(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.
6. $f_6(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$.
7. $f_7(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Exercice 10.11. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} .

1. $(e^x + 1)(e^x - 1) = 0$.
2. $(3x + 1)e^{-x^2+\sqrt{x}} = 0$.
3. $(2x + 1)e^x = e^x$.
4. $-e^{x^2+3} = \frac{1}{e^{x+3}}$.

Exercice 10.12. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} .

1. $x^2 e^{-2x+5} \leq 0$.
2. $\frac{x-3}{e^{-x^2}} < 0$.
3. $(2x+1)e^x \geq e^x$.
4. $(e^{-x}-1)(e^{3x+1}+1) > 0$.

Exercice 10.13. Donner les domaines de définitions puis étudier les variations et signes des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = -4e^{-3x+1}$.
2. $f_2(x) = xe^{x^2-2x+3}$.
3. $f_3(x) = -4e^{\sqrt{x}}$.
4. $f_4(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.
5. $f_5(x) = e^{-2x^3+4x^2-x+5}$.
6. $f_6(x) = \sqrt{1-x}e^{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 10.14. [Écologie] Le hérisson européen est une espèce menacée dont les études de population ont principalement été menées au Royaume-Uni. Les principales causes de sa disparition sont le trafic automobile et l'utilisation de pesticides. Le nombre de hérissons au Royaume-Uni a pu être modélisé par la fonction

$$H(t) = 35e^{-0,053t}, \quad t \in [0; +\infty[,$$

où t est le temps en année depuis 1950 ; ainsi $H(0)$ est le nombre de hérisson en million au Royaume-Uni en 1950.

1. Calculer le nombre de hérisson en 1950.
2. Étudier les variations de la fonction H . Qu'en déduisez-vous pour les hérissons.
3. Selon des études, la population de hérissons est passée d'environ 35 millions d'individus en 1950 à environ un million en 2017. Retrouver ces résultats avec le modèle.
4. Selon le modèle, en quelle année le nombre de hérissons au Royaume-Uni passera-t-il sous la barre des 100000 individus ?

Exercice 10.15. [Physique] La désintégration radioactive est un phénomène naturel au cours duquel des noyaux d'atomes se transforment en autres noyaux via une émission de particules et d'énergie.

On considère un échantillon de N_0 noyaux radioactifs au temps $t = 0$. On sait que le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs vérifie en tout temps t l'équation :

$$(E) \quad \tau N'(t) + N(t) = 0,$$

où $N(0) = N_0$ et τ (lettre grecque « tau ») est un réel strictement positif appelé constante radioactive qui dépend de l'élément radioactif considéré.

1. Montrer que la fonction $N(t) = N_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ vérifie l'équation (E).
2. Démontrer que N est décroissante. Quelle interprétation peut-on en faire ?
3. On note $\ln(2)$ l'unique solution de l'équation $e^x = 2$. Montrer que le nombre de noyaux radioactifs a été divisé par deux par rapport à son nombre initial lorsque $t = \tau \ln(2)$. On appelle ce réel temps de demi-vie de l'élément radioactif.
4. (*) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de N en $t = 0$ avec l'axe des abscisses. On appelle ce point « durée de vie moyenne de l'échantillon ».

Exercice 10.16. [Chimie et Archéologie] Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14, un élément radioactif se désintégrant selon les mécanismes décrits dans l'exercice ci-dessus. À la mort de l'organisme, le carbone 14 présent dans celui-ci n'est plus renouvelé et il se désintègre.

Pour un certain être vivant, on estime la concentration de carbone 14 à l'intérieur de son organisme à 15,3 unités lors de sa vie et on admet qu'une fois mort, la concentration en donnée par la fonction

$$C(t) = 15,3e^{-0,124t}, \quad t \in [0; +\infty[,$$

où t est en millier d'années.

1. Étudier les variations de la fonction C .
2. Donner l'allure de la représentation graphique de C .
3. Des archéologues mesurent la concentration en carbone 14 d'un os à 7,27 unités. Estimer l'âge de cette os.
4. Lorsque la concentration en carbone 14 devient inférieure à 0,3% de son niveau originel, on ne peut plus dater à l'aide du carbone 14. Déterminer à partir de quel âge la datation devient impossible pour notre organisme.

Exercice 10.17. [Algorithmique] Le nombre e peut être approché à le nombre $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini.

1. Calculer u_1 et u_2 . Cette approximation vous semblent-elles satisfaisantes? Justifier.
2. Pour $n = 100$, avec quelle précision u_n approche e ? Même question pour $n = 10000$.
3. Écrire un algorithme donnant quelle valeur de n la précision de l'approche de e par u_n est de l'ordre de 10^{-5} . Le programmer.

10.6.3 Entraînement

Exercice 10.18. Simplifier ou développer et réduire les expressions suivantes.

1. $u_n = e^{3n+2} \times e^{-6n-4}$.
2. $v_n = (e^{n+1})^3 \times e^{7n-2}$.
3. $w_n = \frac{(e^{n+4})^2}{e^{-4n+5}}$.
4. $x_n = (e^n - 1)(e^n + 1)$.
5. $y_n = (e^n + e^{2n})^2$.
6. $z_n = (e^{-2n} - e^n)(e^{-2n} + e^n)$.

Exercice 10.19. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} .

1. $e^x = e^{-4}$.
2. $10 + e^x = 0$.
3. $e^{-5x+4} = e$.
4. $4e^{x^2} = 4$.
5. $(e^{4x} - 1)(e^{2x} + 1) = 0$.
6. $(7 - 14x)e^{-\cos(x)+\sqrt{x}} = 0$.
7. $(-3x^2 + 5x + 1)e^x = e^x$.
8. $-e^{2-x^2} = \frac{1}{e^{2-x}}$.

Exercice 10.20. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} .

1. $e^{x+1} < e^{12}$.
2. $10 + e^x > 0$.
3. $e^{5x-1} \leq e$.
4. $4e^{x^2} \geq 4$.
5. $(e^{4x} - 1)(e^{2x} + 1) \leq 0$.
6. $(14 - 7x)e^{-\cos(x)+\sqrt{x}} < 0$.
7. $(-3x^2 + 5x + 1)e^x \geq e^x$.
8. $-e^{2-x^2} < \frac{1}{e^{2-x}}$.

Exercice 10.21. Donner les domaines de définitions puis étudier les variations et signes des fonctions suivantes.

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|--|
| 1. $f_1(x) = 2e^{5x-2}$. | 3. $f_3(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. | 5. $f_5(x) = e^{2x^3-3x^2+2x+4}$. |
| 2. $f_2(x) = (x-1)e^{4x^2-16}$. | 4. $f_4(x) = 6e^{\sqrt{x}+1}$. | 6. $f_6(x) = \sqrt{x+3}e^{\sqrt{x+3}}$. |

10.7 Étude

En 1838, le mathématicien Pierre-François Verhulst propose d'étudier la croissance d'une population soumise à une limitation des ressources grâce à l'équation suivante :

$$(E) \quad P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right),$$

où $P(t)$ est la population en fonction du temps t , $r > 0$ le taux de croissance et $K > 0$ la capacité d'accueil de la population en lien avec les ressources disponibles.

On appelle P_0 la population initiale. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

1. Quelle est le signe de f sur \mathbb{R} ? Est-ce cohérent avec la modélisation d'une population ?
2. Montrer que f est solution de (E) .
3. Que se passe-t-il lorsque $P_0 = K$? Quelle interprétation concrète peut-on faire ?
4. On souhaite étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
 - (a) Quelles sont les variations de f si $K > P_0$? Interpréter.
 - (b) Quelles sont les variations de f si $K < P_0$? Interpréter.