Chapitre 4

Nombre dérivé

4.1 Nombre dérivé

Définition 4.1. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. Soit h un nombre réel non nul tel que $x_0 + h \in I$. On appelle* ***taux d'accroissement*** *de f entre x_0 et $x_0 + h$ le nombre :*

$$\tau_h(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Définition 4.2. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I. On dit que f est* ***dérivable*** *en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ admet une unique limite finie lorsque h tend vers 0. On appelle cette limite* ***nombre dérivé*** *de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$. On peut écrire :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \qquad ou \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

Exemples :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
   — On vérifie si f est dérivable en 1. Soit $h \neq 0$, on pose :

$$\begin{aligned}\tau_h(1) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \frac{h^2 + 2h}{h} \\ &= h + 2.\end{aligned}$$

   Cette expression tend vers 2 lorsque h tend vers 0. On peut donc écrire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2.$$

   On en déduit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$.

— On vérifie si f est dérivable en -2. On pose :

$$\begin{aligned}\tau_h(-2) &= \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}\\ &= \frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h}\\ &= \frac{h^2-4h}{h}\\ &= h-4.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers -4 lorsque h tend vers 0. On peut donc écrire :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = -4.$$

On en déduit que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = -4$.

2. On définit la fonction g par $g(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On vérifie si g est dérivable en 0. Soit $h > 0$, on pose :

$$\begin{aligned}\tau_h(0) &= \frac{g(0+h)-g(0)}{h}\\ &= \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{h}\\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. On en déduit que g n'est pas dérivable en 0.

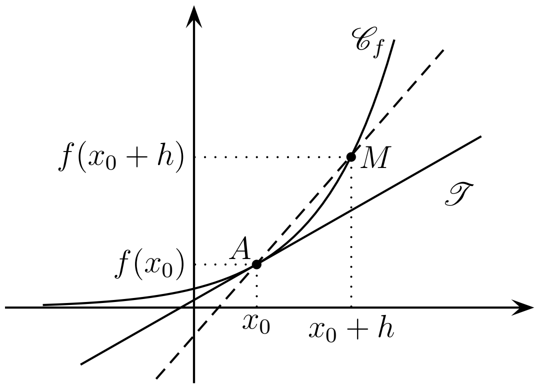
3. On définit la fonction v par $v(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie si v est dérivable en 0. Soit $h \neq 0$, on pose :

$$\begin{aligned}\tau_h(0) &= \frac{v(0+h)-v(0)}{h}\\ &= \frac{|0+h|-|0|}{h}\\ &= \frac{|h|}{h}.\end{aligned}$$

On a $|h| = h$ si $h > 0$ et donc $\tau_h = 1$; par contre, si $h < 0$, on a $|h| = -h$ et donc $\tau_h = -1$. Cette expression n'a pas une unique limite (elle en deux : 1 et -1) lorsque h tend vers 0. On en déduit que v n'est pas dérivable en 0.

4.2 Tangente

Définition 4.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ tel que f soit dérivable en x_0. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(x_0\,;f(x_0))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$.*

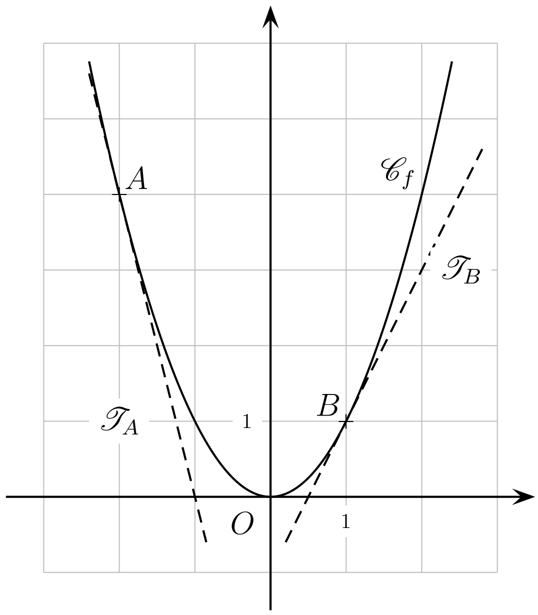


Lorsque h tend vers 0, alors le point M se rapproche de A, et la droite (AM) s'approche de $\mathscr{T}$.

★ Vidéo.

Exemple :

On considère à nouveau la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Précédemment nous avons établi que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$. De même nous avons montré que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = -4$. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-2\,;4)$ et $B(1\,;1)$. On note $\mathscr{T}_A$ et $\mathscr{T}_B$ les tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant respectivement par A et B. Le coefficient directeur de $\mathscr{T}_A$ est donc $f'(-2) = -4$ et le coefficient directeur de $\mathscr{T}_B$ est $f'(1) = 2$.



Propriété 4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x_0 \in I$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente d'équation :*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Démonstration. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. On sait que $\mathscr{T}$ a pour coefficient directeur $f'(x_0)$. Cela signifie que le vecteur $u\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{T}$. On a alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{T} &\iff (AM) \text{ et } \mathscr{T} \text{ sont parallèles },\\ &\iff u\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - f(x_0) \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires,}\\ &\iff 1 \times (y - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0) = 0,\\ &\iff y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \end{aligned}$$

□

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

Exemple :

— Dans l'exemple précédent, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. Cela signifie que $\mathscr{T}_A$ a pour équation $y = 2(x-1)+1$ que l'on peut réduire en $y = 2x - 1$.

— On a également $f(-2) = 4$ et $f'(-2) = -4$. La tangente $\mathscr{T}_B$ a donc pour équation $y = -4(x-(-2))+4$, que l'on peut réécrire $y = -4x - 4$.

4.3 Attendus et savoir-faire

— Calculer un taux d'accroissement, un nombre dérivé.

— Déterminer si une fonction est dérivable en un point ou pas.

— Lire un nombre dérivé sur une tangente.

— Déterminer l'équation d'une tangente et la tracer.

4.4 Exercices

4.4.1 Démarrage

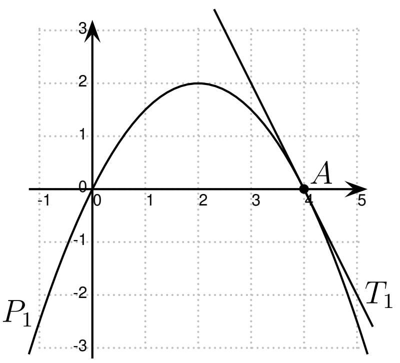
Exercice 4.1. Pour $h \neq 0$, calculer le taux d'accroissement en 1 des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

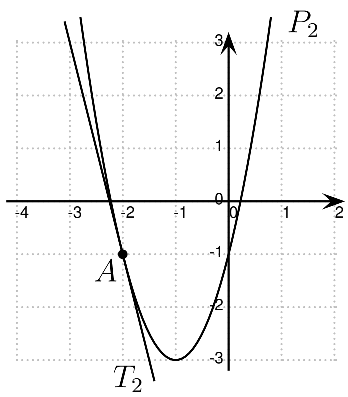
$$f(x) = -1, \quad g(x) = 3x - 1, \quad h(x) = x^2.$$

Exercice 4.2. Déterminer le nombre dérivée en 1 des fonctions de l'exercice ci-dessus.

Exercice 4.3. Déterminer l'équation de la tangente en 1 des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 4.4. Déterminer les nombres dérivés des polynômes P_1 et P_2 au point A puis les équations des tangentes T_1 et T_2.





Exercice 4.5. À partir des équations de tangentes à f en $x = 2$ ci-dessous, déterminer $f(2)$ et $f'(2)$.

$$y = -3(x-2)+4, \quad y = 5(x-2)+\frac{1}{4}, \quad y = -\frac{1}{2}(x-2).$$

4.4.2 Approfondissement

Exercice 4.6. Pour $h \neq 0$, calculer le taux d'accroissement en 1 des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4, \quad h(x) = \frac{1}{x}.$$

Indication : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Exercice 4.7. Déterminer le nombre dérivée en 1 des fonctions de l'exercice ci-dessus.

Exercice 4.8. Soit f la fonction carrée et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de $\mathscr{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$?

Exercice 4.9. Soit f la fonction cube et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de $\mathscr{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -8x + 5$?

Exercice 4.10. Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses, justifier.

1. Si $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\,(1\,;2)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
2. Si la droite d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\,(0\,;3)$, alors $f'(0) = 3$.
3. Si $f(1) = 2$ et $f'(2) = 1$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\,(2\,;1)$ est d'équation $y = x - 1$.

4.4.3 Entraînement

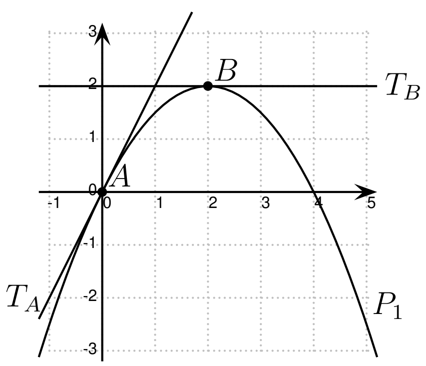
Exercice 4.11. Pour $h \neq 0$, calculer le taux d'accroissement en -1 des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

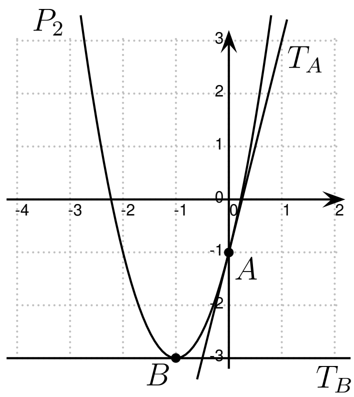
$$f_1(x) = -1, \quad f_2(x) = 5x, \quad f_3(x) = -2x^2+1, \quad f_4(x) = x^2+3x-2, \quad f_5(x) = \frac{-3}{x}, \quad f_6(x) = 2+\frac{5}{x}.$$

Exercice 4.12. Déterminer le nombre dérivée en -1 des fonctions de l'exercice ci-dessus.

Exercice 4.13. Déterminer l'équation de la tangente en -1 des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 4.14. Déterminer les nombres dérivés des polynômes P_1 et P_2 aux points A et B puis les équations des tangentes T_A et T_B.





Exercice 4.15. Soit f la fonction carrée et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de $\mathscr{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 1$?

Exercice 4.16. Soit f la fonction racine carrée et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de $\mathscr{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = 4x + 5$?

4.5 Étude

La figure ci-dessous représente la trajectoire du Coco News, la mouette factrice dans l'univers de One Piece lorsqu'elle vient livrer le journal à Brook, Chopper, Robin et Sanji sur leur bateau. Le journal – une fois lâchée par le Coco News – tombe alors selon la tangente de la trajectoire de ce dernier.

Le Coco News est représentée par le point M et sa trajectoire a pour équation

$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

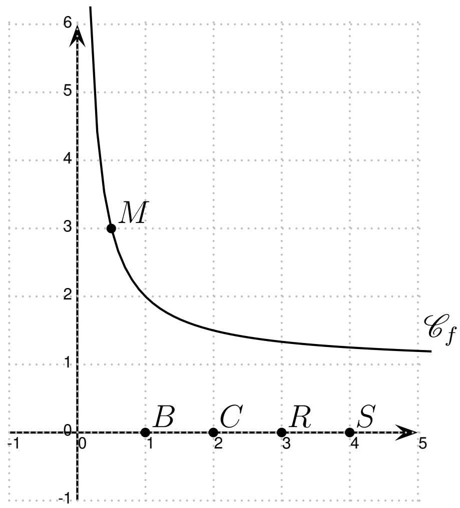
Brook, Chopper, Robin et Sanji sont respectivement représentés par les points B, C, R et S.

On souhaite trouver en quels points de sa trajectoire le Coco News doit lâcher les journaux pour que ceux-ci atteignent les quatre cibles.

Cas général

On note x_0 l'abscisse du point de largage du journal.

1. Quelle est l'ordonnée du point de largage du journal ?
2. Montrer que le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^*$ est $-\dfrac{1}{x_0^2}$.
3. Donner l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la trajectoire du Coco News au point de coordonnées $(x_0\,; f(x_0))$.



Cas particulier : Brook

1. Par quel point passe $\mathscr{T}$?
2. En déduire que x_0 vérifie $x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$.
3. Trouver x_0 et les coordonnées du point de largage pour Brook.

Retour au cas général

On note a l'abscisse d'un personnage quelconque sur le bateau.

1. Montrer que x_0 vérifie
$$x_0^2 + 2x_0 - a = 0.$$
2. En déduire une expression de x_0 et des coordonnées du point de largage en fonction de a.
3. Écrire et coder en Python un algorithme donnant les coordonnées du point de largage du journal connaissant l'abscisse de sa cible. Le tester avec Brook puis Chopper, Robin et Sanji.