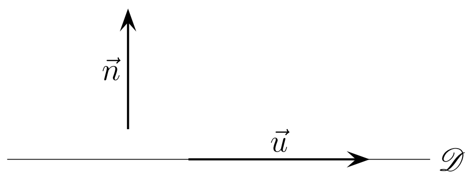
Chapitre 11

Application du produit scalaire

11.1 Équations de droites

Définition 11.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs non nuls du plan et $\mathscr{D}$ une droite dirigée par $\vec{u}$. On dit que $\vec{n}$ est un* ***vecteur normal*** *à $\mathscr{D}$ s'il est orthogonal à $\vec{u}$.*



Pour les deux propriétés ci-dessous, le plan est supposé muni d'un repère orthonormé.

Propriété 11.1. *Soient a, b, c trois nombres réels (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) et $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.*

Démonstration. D'après une propriété vue au chapitre dans un chapitre précédent, la droite $\mathscr{D}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont bien orthogonaux :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = b \times a + (-a) \times b = 0.$$

□

Propriété 11.2. *Soient a, b deux nombres réels (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) tels que $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et et $\mathscr{D}$ une droite du plan. Alors $\vec{n}$ est un vecteur normal est un vecteur normal de $\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel c tel que $ax + by + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $M(x\,;y)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$; le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dirige donc $\mathscr{D}$. $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, si et seulement si

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 &\iff a(x - a_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\iff ax + by + (-ax_A - by_A) = 0. \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $c = -ax_A - by_A$. Si $M = A$ l'équation est aussi vérifiée. □

Remarque Tout comme une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, elle admet aussi une infinité de vecteurs normaux. Ceux-ci sont tous colinéaires deux à deux.

★ Vidéo.

11.2 Équations de cercles

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Propriété 11.3. *Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point du plan et r un nombre réel positif. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r a pour équation :*

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2.$$

Démonstration. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan :

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff AM=r \\ &\iff \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=r \\ &\iff (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2. \end{aligned}$$

□

Propriété 11.4. *Soient $A(x_A\,;y_A)$ de $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point du plan. Alors :*

$$M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$$

Démonstration. Un point M distinct de A et B appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M, si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux. □

Exemple : Soient $A(3\,;4), B(5\,;1)$ et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. On cherche une équation de $\mathscr{C}$. Soit $M(x\,;y)$. On sait que $M\in\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. On a :

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3-x\\4-y\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\1-y\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff (3-x)(5-x)+(4-y)(1-y)=0 \\ &\iff x^2-8x+y^2-5y+19=0 \\ &\iff (x-4)^2-16+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+19=0 \\ &\iff (x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{4} \\ &\iff (x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

11.3 Compléments de trigonométrie

11.3.1 Formules d'addition

Propriété 11.5. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Démonstration.

1. Soient A et B les points du cercle trigonométrique associés à a et b : $A(\cos(a)\,;\sin(a))$ et $B(\cos(b)\,;\sin(b))$. On a donc
$$OA = 1, \quad OB = 1 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = b - a[2\pi].$$
On en déduit que
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right).$$
Il suffit alors d'appliquer la formule du produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pour obtenir le résultat.
2. Comme la cos est paire et sin est impaire, il suffit de remplacer b par $-b$ dans *1*.
3. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),$$
en remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$ dans *1*, on obtient :
$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - [a+b]\right)\\ &= \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} - a\right] - b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b)\\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$
4. On obtient *4* en remplaçant b par $-b$ dans *3*.

□

Corollaire 11.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$;
2. $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(x)$;
3. $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$;
4. $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(x)$.

Démonstration. Exercice. □

★ Vidéo.

11.3.2 Formules de duplication

Propriété 11.6. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
2. $\sin(2a) = 2\sin(a) \times \cos(a)$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple : On souhaite résoudre dan $[0\,;2\pi]$ l'équation trigonométrique

$$\cos(2x) = \sin(x).$$

On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc l'équation ci-dessus est équivalente à

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0.$$

Posons $X = \sin(x)$, on doit alors résoudre

$$2X^2 + X - 1 = 0.$$

On a $\Delta = 9$ donc deux racines : $X_1 = -1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$.
On a donc deux possibilités :

$$\sin(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

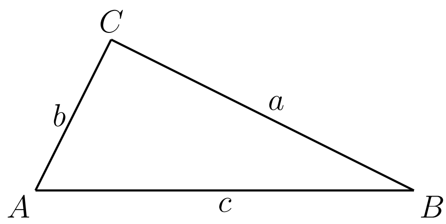
Donc $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

11.3.3 Formule d'Al Kashi

Propriété 11.7. *Pour tout triangle ABC, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$



Remarque : le théorème de Pythagore en est un cas particulier dont la démonstration est laissée en exercice.

★ Vidéo.

11.4 Attendus et savoir-faire

- Déterminer une équation de droite connaissant un vecteur normal et un point et réciproquement.
- Déterminer l'équation d'un cercle connaissant son centre ou deux points diamétralement opposés.
- Connaître et manipuler les formules de duplication des sinus et cosinus.

11.5 Exercices

11.5.1 Démarrage

Exercice 11.1. Pour chacun des cas ci-dessous, donner un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D} : 7x + 3y + 4 = 0.$
2. $\mathscr{D} : -x + y - 5 = 0.$
3. $\mathscr{D} : x - 7y + 9 = 0.$
4. $\mathscr{D} : x - 4 = 0.$
5. $\mathscr{D} : 6y + 1 = 0.$

Exercice 11.2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $A\,(2\,;-3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A\,(-5\,;0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. $A\,(4\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.3. Dans chaque cas, déterminer si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux puis – si c'est le cas – le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. $A\,(0\,;-5)$, $B\,(-6\,;7)$ et $C\,(8\,;1)$.
2. $A\,(5\,;-10)$, $B\,(-5\,;15)$ et $C\,(0\,;-12)$.

Exercice 11.4. Soient $\mathscr{D}$ la droite d'équation $2x + y + 5 = 0$ et H le projeté orthogonal de $M\,(2\,;-4)$ sur $\mathscr{D}$. Montrer que H a pour coordonnées $H\,(0\,;-5)$.

Exercice 11.5. Pour chacune des équations de cercle suivantes, déterminer le rayon et les coordonnées du centre du cercle.

1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$
2. $(x+2)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0.$
3. $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0.$
4. $(x+3)^2 + y^2 - 16 = 0.$

Exercice 11.6. Dans chaque cas, déterminer l'équation du cercle de centre I et de rayon R.

1. $I\,(-2\,;3)$ et $R = 5$.
2. $I\,(1\,;2)$ et $R = \sqrt{3}$.
3. $I\,(0\,;-5)$ et $R = 2\sqrt{2}$.

Exercice 11.7. Déterminer si $P\,(1\,;2)$ appartient au cercle d'équation suivante :

1. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0.$
2. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0.$

Exercice 11.8. Montrer que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

11.5.2 Approfondissement

Exercice 11.9. Pour chacun des cas ci-dessous, donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A\,(2\,;-3)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A\,(-5\,;0)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. $A\,(4\,;1)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.10. Pour chacun des cas ci-dessous, donner un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ puis déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.

1. $\mathscr{D}\ :\ -3x+5y+4=0$ et $A\,(1\,;-1)$.
2. $\mathscr{D}\ :\ 7x-y-10=0$ et $A\,(2\,;-4)$.
3. $\mathscr{D}\ :\ -x-3=0$ et $A\,(5\,;7)$.
4. $\mathscr{D}\ :\ 2y+8=0.$ et $A\,(2\,;0)$.

Exercice 11.11. Déterminer le réel m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\m\end{pmatrix}$ soit normal à la droite d'équation $x-2y-1=0$.

Exercice 11.12. Déterminer le projeté orthogonal du point $M\,(1\,;2)$ sur la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\mathscr{D}\ :\ 7x+3y+4=0$.
2. $\mathscr{D}\ :\ -x+y-5=0$.
3. $\mathscr{D}\ :\ x-4=0$.

Exercice 11.13. Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

1. $A\,(3\,;-2)$ et $B\,(-5\,;6)$.
2. $A\,(1\,;0)$ et $B\,(0\,;-5)$.
3. $A\,(-2\,;2)$ et $B\,(1\,;-1)$.

Exercice 11.14. Déterminer si les équations suivantes sont des équations de cercle et le cas échéant, préciser leur centre et rayon.

1. $x^2+y^2-6x+8y=0$.
2. $x^2+y^2-4x+6y+8=0$.
3. $x^2+y^2+12x-4y+50=0$.
4. $x^2+y^2+2x+2y+2=0$.

Exercice 11.15. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du cercle $\mathscr{C}$ d'équations suivantes.

1. $\mathscr{D}\ :\ 7x+3y+4=0$ et $\mathscr{C}\ :\ (x+3)^2+(y+4)^2=5$.
2. $\mathscr{D}\ :\ -x+y+2=0$ et $\mathscr{C}\ :\ (x-4)^2+(y-1)^2=4$.
3. $\mathscr{D}\ :\ 3y+1=0$ et $\mathscr{C}\ :\ x^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=1$.

Exercice 11.16. En utilisant les résultats de l'exercice 11.8, déterminer les cosinus et sinus suivants.

1. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.
2. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

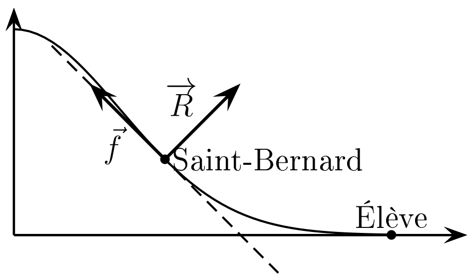
Exercice 11.17. Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\cos(2x)=-\sin(x)$.
2. $\cos(2x)=2\cos(x)$.
3. $\cos(2x)=-2\sin(x)$.
4. $\sin(2x)=\cos(x)$.
5. $\sin(2x)=\sin(x)$.
6. $\cos(2x)=1-\sin(2x)$.

Exercice 11.18. [Démonstration] Démontrer le théorème de Pythagore à l'aide de la formule d'Al Kashi.

Exercice 11.19. [Le Saint-Bernard, les frottements et la réaction du support **]

On considère un Saint-Bernard descendant en luge une piste afin un élève en difficulté en bas de la piste. Le profil de la piste est donné par la courbe de la fonction p définie et dérivable sur un intervalle I. Les forces de frottements $\vec{f}$ ont pour direction celle de la tangente à la trajectoire suivie par le Saint Bernard mais de sens opposé à son mouvement tandis que la force de réaction $\overrightarrow{R}$ du support a pour direction la normale à cette tangente.

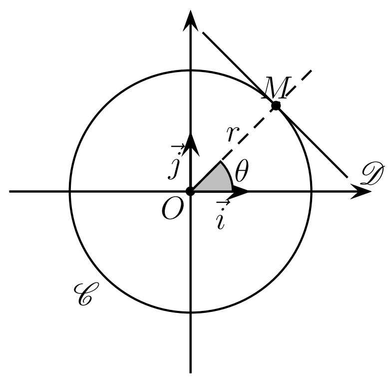


1. Rappeler la forme de l'équation de la tangente à la courbe de p en un point $(x_0\,;p(x_0))$.
2. En déduire ses vecteurs directeurs et normaux et donc la direction des forces de frottements et de réaction du support subies par le Saint-Bernard.
3. Déterminer une expression de ces vecteurs pour $p(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}+1}$ pour $x \in [0\,;5]$. Que valent-ils dans le cas particulier $x = 2$?

Exercice 11.20. [Tangente à un cercle **]

Soit $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère du plan. On appelle coordonnées polaires d'un point $M\,(x\,;y)$ le couple $(r\,;\theta)$ où $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

Une tangente à un cercle est une droite passant par un unique point du cercle. Si l'on décrit le cercle comme courbes représentatives de fonctions dérivables, alors la notion de tangente à un cercle coïncide avec celle de tangente à la courbe d'une fonction.



On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $r > 0$.

1. Montrer que pour tout point $M\,(x\,;y) \in \mathscr{C}$, on a $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ où $\theta = \left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.
2. Réciproquement, montrer que tout point de coordonnés $(r\cos(\theta)\,;r\sin(\theta))$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
3. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y - r = 0$ est tangente à $\mathscr{C}$ au point $M\,(r\cos(\theta)\,;r\sin(\theta))$.
4. En déduire un vecteur normal à la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M\,(r\cos(\theta)\,;r\sin(\theta))$. Que remarquez-vous ?
5. **[Application]** On considère un satellite en orbite autour d'une planète selon une trajectoire circulaire. Donner en fonction de sa positon autour de la planète son vecteur de déplacement instantané et le vecteur représentant l'attraction gravitationnelle exercée par la planète sur celui-ci.

11.5.3 Entraînement

Exercice 11.21. Pour chacun des cas ci-dessous, donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A\,(0\,;3)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $A\,(5\,;0)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. $A\,(1\,;4)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.22. Pour chacun des cas ci-dessous, donner un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ puis déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.

1. $\mathscr{D}\ :\ 6x + 9y + 3 = 0$ et $A\,(-1\,;1)$.
2. $\mathscr{D}\ :\ -2x + y - 10 = 0$ et $A\,(-2\,;4)$.
3. $\mathscr{D}\ :\ x + 17 = 0$ et $A\,(-5\,;0)$.
4. $\mathscr{D}\ :\ -7y - 1 = 0.$ et $A\,(0\,;2)$.

Exercice 11.23. Déterminer le projeté orthogonal du point $M\,(0\,;-1)$ sur la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\mathscr{D}\ :\ -3x + 2y + 1 = 0.$
2. $\mathscr{D}\ :\ x - y + 5 = 0.$
3. $\mathscr{D}\ :\ y + 9 = 0.$

Exercice 11.24. Dans chaque cas, déterminer l'équation du cercle de centre I et de rayon R.

1. $I\,(3\,;2)$ et $R = 1$.
2. $I\,(-1\,;-4)$ et $R = \sqrt{2}$.
3. $I\,(3\,;0)$ et $R = 2\sqrt{3}$.

Exercice 11.25. Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

1. $A\,(5\,;0)$ et $B\,(5\,;-6)$.
2. $A\,(9\,;3)$ et $B\,(0\,;1)$.
3. $A\,(2\,;-2)$ et $B\,(-1\,;1)$.

Exercice 11.26. Déterminer si les équations suivantes sont des équations de cercle et le cas échéant, préciser leur centre et rayon.

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 8x + 3y + 100 = 0$.

Exercice 11.27. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du cercle $\mathscr{C}$ d'équations suivantes.

1. $\mathscr{D}\ :\ x + 9y - 6 = 0$ et $\mathscr{C}\ :\ (x+1)^2 + y^2 = 9$.
2. $\mathscr{D}\ :\ 2x - y + 2 = 0$ et $\mathscr{C}\ :\ (x+8)^2 + (y-6)^2 = 6$.

Exercice 11.28. En utilisant les résultats de l'exercice 11.8, déterminer les cosinus et sinus suivants.

1. $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.
2. $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.